

潮汐摩擦的非线性效应 (II)*

方国洪

(中国科学院海洋研究所)

在本文的第(I)部分中,已给出了平方摩擦项的 Fourier 展开式^[1]。在这一部分里,我们将给出潮汐方程的一组近似解,并阐明解的物理意义,所得结果表明:

1. 由于摩擦的非线性,当多个源潮波同时存在时,小的潮波比大的潮波衰减得更快。这个论断实际上 Jeffreys (1970), Gallagher 和 Munk (1971), 以及 Garrett (1972) 都曾得出过,虽然不是都说得很明确。作者在文献 [2] 中也从另一角度作过说明,本文只是给出更确切一些的数值。

2. 考虑到摩擦作用后,浅水潮波不可能无限增长起来,这不同于一般的无摩擦情况下的浅水潮波的摄动解。特别由于倍潮波的增长受到严重抑制,结果在均匀的渠道中,激波产生的条件比无摩擦情况严格得多,以致在实际的海洋中不存在这样的水域。这说明实际怒潮的发生必须由地形的改变来解释。

3. 摩擦的存在大大加强了频率为源分潮频率之差的浅水潮,这个分潮引起大潮期间的日平均水位高于小潮期间的数值。这一现象在无摩擦情况下是不能解释的。

文章还指出,由于摩擦非线性,潮汐预报所采用的交点因子 f 不会是准确的。

三、源潮波的衰减¹⁾

我们现在讨论在平方摩擦作用下,源潮波的传播,特别是它们衰减的特性。这时微分方程(1.1)的非摩擦非线性项可暂时不予考虑,而写作

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\gamma}{h} |u|u, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

在边界 $x = 0$ 处,潮汐运动为自外海输入的源潮波所决定。

由前节我们看到,由于非线性效应,将产生频率不同于源潮波的,但来源于源潮波的波动,我们称它们为随从潮波。按照习惯,如随从潮波的频率等于某个源潮波的整倍数,则称作倍潮,如等于几个源潮波频率的组合,则称作复合潮。为了区别不同来源的潮波,我们采用一个下标 ν 。若 $\nu = 1$, 或 2, 或 3, \dots , 则表示频率为 σ_1 , 或 σ_2 , 或 σ_3 的源潮波。若 ν 是由几个数字构成的数组,则表示随从潮波。例如 $\nu = m, n$, 则表示频率为 $m\sigma_1 + n\sigma_2$ 的随从潮波; $\nu = m, n, p$, 则表示频率为 $m\sigma_1 + n\sigma_2 + p\sigma_3$ 的随从潮波。

* 中国科学院海洋研究所调查报告第 529 号。本刊编辑部收到稿件日期: 1979 年 10 月 25 日。

1) 一、二部分见本刊 11 卷 2 期, 98—108 页。

今令 $\zeta = \sum \zeta_v$, $u = \sum u_v$, $-\frac{\gamma}{h} |u|u = \sum f_v$, 其中 ζ_v , u_v , f_v 分别为潮位, 潮流和摩擦力的频率为 σ_v 的分量, 则对于每一个 σ_v 波可得到一组方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta_v}{\partial x} = f_v, \\ \frac{\partial \zeta_v}{\partial t} + h \frac{\partial u_v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

前进波的一般形式可写作

$$\begin{cases} u_v = U_v(x) \cos(\sigma_v t - \phi_v(x)) \\ \zeta_v = H_v(x) \cos(\sigma_v t - \phi_v(x)) + G_v(x) \sin(\sigma_v t - \phi_v(x)). \end{cases} \quad (3.3)$$

由式(2.22)或(2.27)可以看到, 摩擦力展开式中 σ_v 频率的分量 f_v 与这个频率的潮流 u_v 的位相相同, 因而有

$$f_v = F_v(x) \cos(\sigma_v t - \phi_v(x)). \quad (3.4)$$

将式(3.3)和(3.4)代入(3.2), 可得

$$\begin{cases} -\sigma_v U_v + g H_v \frac{d\phi_v}{dx} + g \frac{dG_v}{dx} = 0, \\ g \frac{dH_v}{dx} - g G_v \frac{d\phi_v}{dx} = F_v, \\ -\sigma_v H_v + h U_v \frac{d\phi_v}{dx} = 0, \\ \sigma_v G_v + h \frac{dU_v}{dx} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

由这个方程组的第四个方程可得

$$\frac{g}{\sigma_v} \frac{dG_v}{dx} = \frac{gh}{\sigma_v^2} \frac{d^2 U_v}{dx^2},$$

由此可见, 如摩擦力比较小, 潮波的衰减比较缓慢, 以致 $\frac{gh}{\sigma_v^2} \frac{d^2 U_v}{dx^2}$ 相对于 U_v 是一个二阶小量, 那么我们就可以把 $g \frac{dG_v}{dx}$ 从方程组(3.5)中略去, 从而成为

$$\begin{cases} -\sigma_v U_v + g H_v \frac{d\phi_v}{dx} = 0, \\ g \frac{dH_v}{dx} - g G_v \frac{d\phi_v}{dx} = F_v, \\ -\sigma_v H_v + h U_v \frac{d\phi_v}{dx} = 0, \\ \sigma_v G_v + h \frac{dU_v}{dx} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

由(3.6)第一、三式消去 $\frac{d\phi_v}{dx}$, 立即可得 $H_v = \sqrt{\frac{h}{g}} U_v$ 。再将它代回到第一式, 便得 $\frac{d\phi_v}{dx} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{gh}}$, 它是一个常量, 以 β_v 记之。再用第四式将第二式中 G_v 消去, 并以 $H_v =$

$\sqrt{\frac{h}{g}} U_v$, $\beta_v = \frac{\sigma_v}{\sqrt{gh}}$ 代入, 可得 $\frac{dU_v}{dx} = \frac{F_v}{2\sqrt{gh}}$, 将它代到第四式便得 $G_v = -\frac{1}{2\sigma_v} \sqrt{\frac{h}{g}} F_v$.

这样, 方程(3.6)可化作如下简单形式:

$$\begin{cases} \frac{dU_v}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{gh}} F_v, \\ H_v = \sqrt{\frac{h}{g}} U_v, \\ \frac{d\phi_v}{dx} = \beta_v = \frac{\sigma_v}{\sqrt{gh}}, \\ G_v = -\frac{1}{2\sigma_v} \sqrt{\frac{h}{g}} F_v. \end{cases} \quad (3.7)$$

在知道 F_v 的情况下, 这个方程的求解是容易的。

我们来考虑两个源潮波的情形。设这两个潮波的频率分别为 σ_1 和 σ_2 , 在沟渠入口 $x=0$ 处, 潮流振幅分别为 $U_1(0)$ 和 $U_2(0)$; 迟角为 $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ 。

由式(2.22)知, 对于 σ_1, σ_2 波, 方程(3.2)中的 f_v ($v=1$ 或 2) 为

$$f_v = -k_v u_v = -k_v U_v \cos(\sigma_v t - \phi_v), \quad (3.8)$$

其中,

$$\begin{cases} k_1 = \alpha_1 U_1, \alpha_1 = \frac{\gamma}{h} C_{1,0} = \frac{8}{3\pi} \left(1 + \frac{3}{4} s^2 + \dots\right) \frac{\gamma}{h}, \\ k_2 = \alpha_2 U_1, \alpha_2 = \frac{\gamma}{h} C_{0,1} U_1/U_2 = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{8} s^2 + \dots\right) \frac{\gamma}{h}. \end{cases} \quad (3.9)$$

在以后的求解过程中, 我们将假定

$$\mu_v = k_v/\sigma_v \quad (3.10)$$

为一小量, 亦即假定摩擦力在运动方程中为一阶小量。在这个条件下, $\frac{gh}{\sigma_v^2} \frac{d^2 U_v}{dx^2}$ 相对于 U_v 将是 μ_v^2 的量级(关于这一点, 可以容易地对以后所得的解予以验证), 因而可以应用方程组(3.7)。

现在方程组(3.7)中的 F_v 值为

$$\begin{cases} F_1 = -\alpha_1 U_1^2, \\ F_2 = -\alpha_2 U_1 U_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

由于 α_v 与 s^2 有关, 其变化是微小且缓慢的, 故可以认为是常量。这时(3.7)在所给边界条件下具有解:

$$\begin{cases} U_1(x) = U_1(0) \left[1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x\right]^{-1}, \\ U_2(x) = U_2(0) \left[1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x\right]^{-\alpha_2/\alpha_1}, \\ H_v(x) = \sqrt{\frac{h}{g}} U_v(x), \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} G_v(x) = \frac{\mu_v(x)}{2} H_v(x), \\ \phi_v(x) = \beta_v x = \frac{\sigma_v}{\sqrt{gh}} x, \end{cases}$$

其中关于 σ_1 波的解,与文献[2]中就单一波的情况所得出的解具有相同的形式。

从上面的解我们看到,如准确到量级 $O(\mu)$, 波速 $c = \sqrt{gh}$ 及潮汐和潮流振幅的关系 $H = \sqrt{\frac{h}{g}} U$ 均未受到摩擦影响。但摩擦的存在引起了潮汐的位相落后于潮流的位相,位相差为 $\frac{\mu}{2}$, 这与线性摩擦的情况相同,不过在非线性情况下, μ 与潮流的振幅有关。非线性摩擦与线性摩擦情况的一个显著差别是,在线性情况下,各个波的振幅随距离而衰减的情况是相同的;而在非线性摩擦作用下,较小的潮波要衰减得较快。事实上,由式(3.12)知

$$\frac{U_2(x)}{U_1(x)} = \frac{U_2(0)}{U_1(0)} \left[1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right]^{-\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right)}. \quad (3.13)$$

而由式(3.9)和表 1 知,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} &= \frac{C_{0,1}}{s C_{1,0}} = \frac{(1 + 7s^2)E - (1 + 3s^2)(1 - s^2)K}{s^2[(7 + s^2)E - 4(1 - s^2)K]} \\ &= \frac{3 \left(1 + \frac{1}{8} s^2 + \frac{1}{192} s^4 + \dots \right)}{2 \left(1 + \frac{3}{4} s^2 - \frac{3}{64} s^4 + \dots \right)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

α_2/α_1 与 $s = U_2/U_1$ 之间的关系如图 2 所示。当 $U_2/U_1 = 1$ 时, $\alpha_2/\alpha_1 = 1$, 随着 U_2/U_1 的减小, α_2/α_1 逐渐增加,但以 1.5 为极限。

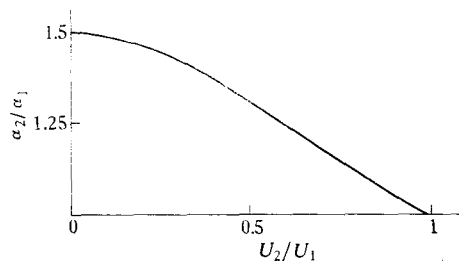


图 2 潮波衰减指数的比值 α_2/α_1 与潮波振幅的比值 U_2/U_1 的函数关系¹⁾

Fig. 2 The ratio α_2/α_1 as a function of the ratio U_2/U_1 , α' 's and U' 's being the decay exponents and amplitudes of the waves.

Garrett (1972) 根据 Jeffreys 的结果曾指出, 如果一个大分潮和许多小分潮同时存在, 则大分潮的 Q 值要比小分潮大 50%。从我们上面的讨论可知, 如果小分潮相对来说不是非常小的话, 这个倍数应当用式(3.14)计算。特别对 S_2 和 M_2 分潮, 若 $U_{S_2}/U_{M_2} =$

1) 图 1 见本刊 11 卷 2 期, 第 99 页。

0.46, 则有 $\alpha_{s_2}/\alpha_{M_2} = 1.33$ 。

Gallagher 和 Munk (1971) 曾指出一个重要的事实, 即太阴潮和太阳潮的“非线性放大”分别为 1.05 和 3.25。我们给出的准确结果分别为 $C_{1,0}/\frac{8}{3\pi}$ 和 $C_{0,1}/\frac{8s^2}{3\pi}$, 当 $s=0.46$, 其值分别为 1.16 和 3.35。这说明, 对小分潮, 摩擦力的非线性放大是很严重的。如果要对某个海区分别计算各个分潮的分布, 在考虑摩擦力时, 就必须考虑这个非线性效应。

由式(3.13)还可知, 若 $U_2(0)/U_1(0) < 1$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $U_2(x)/U_1(x) \rightarrow 0$ 。不过在江河中, 不会出现这种情况。因为当潮波向上游传播到足够远时, 径流要超过潮流, 这时作用到各个分潮的摩擦系数将会相同^[4], U_2/U_1 将不再变化。

前面我们得到, 当 $s \rightarrow 0$ 时, $\alpha_2/\alpha_1 \rightarrow 1.5$ 。这个极限值是在平方摩擦假定下得到的。如果假定摩擦力比例于流速的 n 次方, 我们也容易按照上一节的方法得到展开式, 此时所得到的极限为 $\alpha_2/\alpha_1 \rightarrow (n+1)/2$ 。有趣的是, 当 $n < 1$, 这个极限小于 1, 这时小的潮波反过来要比大的潮波衰减得慢; 不过这不是实际的情况。

四、摩擦随从潮波的演变

由于摩擦力展开式中不但包含有源潮波频率的分量, 而且存在新的频率, 故当潮波进入浅水区域后, 由摩擦非线性造成的随从潮波便产生并成长起来。但是当随从潮波一出现, 便要受到摩擦的作用而消耗能量, 最后由于源潮波的不断衰减, 随从潮波获得的能量也不断减少, 从而在摩擦作用下而趋于消失。这样, 在考虑随从潮波的演变过程时, 对摩擦力展开式需要考虑两个基本项: 一是源潮波所产生的诱发力, 它供给随从潮波以能量; 二是随从潮波所受到的摩擦作用, 它消耗随从潮波的能量, 而这种作用又因源潮波的存在而被加强。

我们先考虑一个频率为 σ_1 的源潮波的情况。它通过摩擦非线性所产生的主要随从潮波为频率 $\sigma_{3,0} = 3\sigma_1$ 的波。在研究它的演变过程时, 必须考虑 σ_1 波对它的影响。我们把源潮波作为第一个波, $\sigma_{3,0}$ 波作为第二个波。那么, 由式(2.22)或(2.27)可知, 摩擦力展开式中, 当 $m=3, n=0$ 和 $m=0, n=1$, 便得出两个频率都是 $\sigma_{3,0}$ 的项。亦即, 对于现在的情形, 方程(3.2)中的 f_v 是

$$\begin{aligned} f_{3,0} &= \frac{8}{15\pi} \frac{\gamma}{h} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{U_{3,0}^2}{U_1^2} + \dots \right) U_1^2 \cos(\sigma_{3,0}t - \beta_{3,0}x - \pi) \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \frac{\gamma}{h} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{U_{3,0}^2}{U_1^2} + \dots \right) U_1 u_{3,0} \\ &\approx \frac{8}{15\pi} \frac{\gamma}{h} U_1^2 \cos(\sigma_{3,0}t - \beta_{3,0}x - \pi) - \frac{4}{\pi} \frac{\gamma}{h} U_1 u_{3,0}, \end{aligned}$$

这里 $\beta_{3,0} = 3\beta_1$; U_1 是 x 的已知函数: $U_1(x) = U_1(0) \left[1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right]^{-1}$, 其中 $\mu_1(0) = \alpha_1 U_1(0)/\sigma_1 \approx \frac{8}{3\pi} \frac{\gamma}{h} U_1(0)/\sigma_1$ 。

首先我们要指出, 在 f_v 具有上列两项的情况下, 这两项的位相应相同, 亦即 $u_{3,0}$ 的位相也是 $\sigma_{3,0}t - \beta_{3,0}x - \pi$ 。事实上, 如果不是这样, 那么在 u_v 仍由(3.3)表示的情况下, f_v 将具有形式: $f_v = X_v \cos(\sigma_v t - \phi_v) + Y_v \sin(\sigma_v t - \phi_v) + Z_v \cos(\sigma_v t - \phi_v)$ 。这样,

(3.6)的第一个方程右边变成 Y_v , 第二个方程右边变成 $X_v + Z_v$ 。由于 $\frac{d\phi_v}{dx} = \sigma_v/\sqrt{gh}$ 仍然成立, 故从第三个方程知 $H_v = \sqrt{\frac{h}{g}}U_v$ 也成立, 于是第一个方程左边的前两项可消去。结果只要 $\frac{g}{\sigma} \frac{dG_v}{dx}$ 仍是二阶小量, 那么 Y_v 也必定是二阶小量。所以对于目前的问题, 方程(3.7)仍然适合, 但这时

$$F_{3,0} = \frac{8}{15\pi} \frac{\gamma}{h} U_1^2 - \frac{4}{\pi} \frac{\gamma}{h} U_1 U_{3,0}. \quad (4.1)$$

将它代入(3.7)第一式, 可得方程

$$\begin{aligned} \frac{dU_{3,0}(x)}{dx} &= \frac{8}{15\pi} \frac{\gamma}{h} \frac{1}{2\sqrt{gh}} U_1^2(0) \left[1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right]^{-2} \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \frac{\gamma}{h} \frac{1}{2\sqrt{gh}} U_1(0) \left[1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right]^{-1} U_{3,0}(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

这是一个线性的一阶常微分方程, 解之, 并以边界条件 $U_{3,0}(0) = 0$ 代入, 可得 $U_{3,0}(x)$; 再将结果代入(4.1), 求得 $F_{3,0}$ 并重新代入(3.7)第四式, 可得 $G_{3,0}(x)$ 。其结果是:

$$\begin{cases} U_{3,0}(x) = \frac{2}{5} U_1(x) \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ \quad = \frac{2}{5} U_1(0) \left[\left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-1} - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-\frac{1}{2}} \right], \\ G_{3,0}(x) = \frac{1}{15} \mu_1(0) \sqrt{\frac{h}{g}} U_1(0) \left[\left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-2} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-\frac{3}{2}} \right]. \end{cases} \quad (4.3)$$

我们来讨论这个波的演变过程。

当 x 比较小, 有 $U_{3,0}(x) = \frac{2}{5} U_1(0) \left[\frac{1}{4} \mu_1(0) \beta_1 x - \frac{7}{32} (\mu_1(0) \beta_1 x)^2 + \dots \right]$, 即开始时 $u_{3,0}$ 的振幅很小, 作用在这个波上的摩擦力也很小, 潮波振幅差不多线性增加。但当 x 稍大后, 随着 U_3 的增加, 摩擦力也增加, 潮波增长的速率便逐渐下降。到了一定的距离, $U_{3,0}(x)$ 将达到最大值。其发生地点由条件 $\frac{dU_{3,0}}{dx} = 0$ 确定。由(4.3)可得, 这时 $\mu_1(0) \beta_1 x = \frac{5}{2}$, 相应的 $U_1 = \frac{4}{9} U_1(0)$, $U_{3,0} = 2/15 U_1 = \frac{8}{135} U_1(0)$ 。由此可知 $\sigma_{3,0}$ 波的增长是有一定限度的, 当它达到最大值时, 振幅只有在同一地点源潮波振幅的 $2/15$ 。这个结果也很容易从(4.1)或(4.2)得出。在开始阶段, $U_{3,0}$ 很小, 在第一项的作用下, $\sigma_{3,0}$ 波开始增长, 而随着它的增大, 第二项变得越来越重要。当这两项相抵时, 亦即当 $U_{3,0} = \frac{2}{15} U_1$ 时, $\sigma_{3,0}$ 波不再增大。此后第二项便超过第一项, $\sigma_{3,0}$ 波开始衰减。但是这个波的诱发力仍然供给其能量, 其衰减要比源潮波来得慢。由式(4.3)可以看到, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $U_{3,0}, U_1 \rightarrow 0$, 且 $U_{3,0}/U_1 \rightarrow \frac{2}{5}$ 。

我们讨论了 $\sigma_{3,0}$ 波的演变过程, 这种过程的特征是所有随从潮波都具有的。不过对于 $\sigma_{3,0}$ 波我们不能指望所得的具体数值会与实际符合得很好。因为摩擦力比例于 $|u|u$ 这个规律的建立是以对稳定流的观测为依据的, 而应用于非稳定流时将不可能很好地遵

循这一规律。特别象 $3\sigma_1, 5\sigma_1$ 这些短周期分量很可能不会象由这一规律得出的结果那么大。就是说式(2.2)第 2, 3, ……项与实际的情况可能不会很符合。但是第 1 项将会比较接近实际。正是基于这一考虑,我们在第二节中对多波的摩擦力展开时,主要只考虑了式(2.26)的第一项。

现在再研究一个较大的 σ_1 波和一个较小的 σ_2 波相互作用所产生的随从潮波,其频率为 $\sigma_{2,-1} = 2\sigma_1 - \sigma_2$, 这个波是摩擦非线性引起的最重要的随从潮波。现在把 σ_1, σ_2 和 $\sigma_{2,-1}$ 波分别看作第一、二和第三个波,从式(2.27)的第三项(取 $i = 2$)和第二项(取 $i = 3$)可知近似有

$$F_{2,-1} = \alpha'_{2,-1} U_1 U_2 - \alpha_{2,-1} U_1 U_{2,-1}, \quad (4.4)$$

式中

$$\begin{cases} \alpha'_{2,-1} = \frac{4}{3\pi} \left(1 - \frac{3}{8} s_2^2 + \dots \right) \frac{\gamma}{h}, \\ \alpha_{2,-1} = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4} s_2^2 + \dots \right) \frac{\gamma}{h}, \end{cases} \quad (4.5)$$

这里 $s_2 = U_2/U_1$, 由于 s_2^2 是小的量,可以认为 $\alpha'_{2,-1}$ 和 $\alpha_{2,-1}$ 为常量;同时由于 $\sigma_{2,-1}$ 波很小,它对 α 值的影响也不予考虑。

$u_{2,-1}$ 的相角是

$$\phi_{2,-1}(x) = \sigma_{2,-1}t - \beta_{2,-1}x - \pi = (2\sigma_1 - \sigma_2)t - (2\beta_1 - \beta_2)x - \pi, \quad (4.6)$$

振幅 $U_{2,-1}(x)$ 则可由方程(3.7)的第一式解出,结果是,

$$\begin{aligned} U_{2,-1}(x) &= \frac{\alpha'_{2,-1}}{\alpha_{2,-1} - \alpha_2} U_2(0) \left[\left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-\alpha_2/\alpha_1} - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-\alpha_{2,-1}/\alpha_1} \right] \\ &= \frac{\alpha'_{2,-1}}{\alpha_{2,-1} - \alpha_2} U_2(x) \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-(\alpha_{2,-1} - \alpha_2)/\alpha_1} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

当 $\mu_1(0)\beta_1 x$ 为小量时,有

$$U_{2,-1}(x) = \frac{\alpha'_{2,-1}}{\alpha_1} U_2(0) \left[\frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{2,-1} (\mu_1(0) \beta_1 x)^2 + \dots}{8\alpha_1} \right].$$

对(4.7)取 $\frac{dU_{2,-1}}{dx} = 0$, 可知 $U_{2,-1}$ 的最大值发生在 $1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x = \left(\frac{\alpha_{2,-1}}{\alpha_2} \right)^{-\alpha_1/(\alpha_{2,-1} - \alpha_2)}$ 处。由于 $\alpha_1/(\alpha_{2,-1} - \alpha_2)$ 的量级为 s_2^{-2} , 是一个大的量,故 $\left(\frac{\alpha_{2,-1}}{\alpha_2} \right)^{-\alpha_1/(\alpha_{2,-1} - \alpha_2)} = \left(1 + \frac{\alpha_1 \alpha_{2,-1} - \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_1} \right)^{\alpha_1/(\alpha_{2,-1} - \alpha_2)} \approx e^{\alpha_1/\alpha_2}$ 。因此,当 $\mu_1(0)\beta_1 x = 2(e^{\alpha_1/\alpha_2} - 1)$ ($=2.24$, 当 $s_2=0.46$)时, $U_{2,-1}$ 达最大值。这时有 $U_2 \approx e^{-U_2(0)}$, $U_{2,-1} \approx \frac{1}{3} e^{-1} U_2(0) \approx \frac{1}{8.2} U_2(0)$ 。就是说当 $U_{2,-1}$ 达到最大值时,它大约是该处 U_2 的 $\frac{1}{3}$ 。这个结果当然也可以

由(4.4)令 $F_{2,-1} = 0$ 得出。

当 $\mu_1(0)\beta_1 x$ 超过 $2(e^{\alpha_1/\alpha_2} - 1)$ 时, $U_{2,-1}$ 便逐渐减小,但比值 $U_{2,-1}/U_2$ 仍将继续增加。然而进一步研究比值 $U_{2,-1}/U_2$ 的变化规律是比较困难的。因为此时 $U_{2,-1}$ 相对于 U_2 已不可忽略,在摩擦力展开式中由 σ_1 波和 $\sigma_{2,-1}$ 波将产生频率为 $2\sigma_1 - \sigma_{2,-1} = \sigma_2$

的项。同时又因 $\sigma_{2,-1}$ 波的迟角为 $(2\beta_1 - \beta_2)x + \pi$, 知上面这一项的迟角为 $2\beta_1x - [(2\beta_1 - \beta_2)x + \pi] + \pi = \beta_2x$, 与 σ_2 源潮波位相相同。因此 σ_1 波和 $\sigma_{2,-1}$ 波的相互作用又能反过来供给 σ_2 波以能量。这样看来有一点是肯定的, 即 $U_{2,-1}$ 不可能超过 U_{20} 。因为如果达到了 $U_{2,-1} = U_2$ 这种状况, 则作用在这两个波上的摩擦力相同, 诱发力也相同, 从而继续保持这种状况。但是当 $x \rightarrow \infty$ 时, $U_{2,-1}/U_1$ 及 U_2/U_1 将都趋于零。

对 $\sigma_{-1,2} = 2\sigma_2 - \sigma_1$ 波也可作类似的讨论。这时有

$$F_{-1,2} = \alpha'_{-1,2}U_2^2 - \alpha_{-1,2}U_1U_{-1,2}, \quad (4.8)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha'_{-1,2} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{12} s_2^2 + \dots \right) \frac{\gamma}{h}, \\ \alpha_{-1,2} = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4} s_2^2 + \dots \right) \frac{\gamma}{h}. \end{cases} \quad (4.9)$$

代入(3.7)第一式求解, 得出

$$U_{-1,2}(x) = \frac{\alpha'_{-1,2}}{2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_{-1,2}} \frac{U_2^2(0)}{U_1(0)} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-\alpha_{-1,2}/\alpha_1} - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x \right)^{-(2\alpha_2 - \alpha_1)/\alpha_1} \right]. \quad (4.10)$$

其最大值发生在 $\mu_1(0) \beta_1 x = 2 \left[\left(\frac{2\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_{-1,2}} \right)^{\alpha_1/(2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_{-1,2} - \alpha_1)} - 1 \right]$ (≈ 1.9 , 当 $s_2 = 0.46$) 处, 这时有 $U_{-1,2} = \frac{1}{4} \frac{U_2}{U_1} U_{20}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $U_{-1,2}/U_2 \rightarrow 0$ 。

由表 2 还可容易地看出, 当 s_2 不大时, $\sigma_{3,-2}$ 波的振幅 $U_{3,-2}$ 大约是 $U_{-1,2}$ 的 $\frac{1}{3}$, 其迟角 $\phi_{3,-2} = (3\beta_1 - 2\beta_2)x_0$ 。

频率为 $2\sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1 + 2\sigma_2$ 及 $3\sigma_1 + 2\sigma_2$ 的随从潮波的演变情况, 理论上应当分别与频率为 $2\sigma_1 - \sigma_2$, $2\sigma_2 - \sigma_1$ 及 $3\sigma_1 - 2\sigma_2$ 的各个波相同。不过正如我们在讨论 $\sigma_{3,0}$ 波时已指出过的一样, 这些高频潮波的理论结果不会与实际相符合。

下面来讨论上述结果的海洋学意义。

我们来考察 M_2 - S_2 相互作用。当它们一起向前传播时, 一个明显的结果是 S_2 分潮比 M_2 衰减得更快。由此可推知, 小潮时合成半日潮的振幅对大潮时的合成振幅的比值将逐渐增大。但是这个比值的增大不仅由于这个原因, 而且还由于随从半日潮波的产生。实际上, 大潮时有 $\phi_{S_2} = \phi_{M_2}$, 由此推得 $\phi_{2MS_2} = 2\phi_{M_2} - \phi_{S_2} + \pi = \phi_{M_2} + \pi$, $\phi_{2SM_2} = 2\phi_{S_2} - \phi_{M_2} + \pi = \phi_{M_2} + \pi$, $\phi_{3M2S_2} = 3\phi_{M_2} - 2\phi_{S_2} = \phi_{M_2}$; 小潮时有 $\phi_{S_2} = \phi_{M_2} + \pi$, 由此推得 $\phi_{2MS_2} = \phi_{M_2}$, $\phi_{2SM_2} = \phi_{M_2} + \pi$, $\phi_{3M2S_2} = \phi_{M_2}$ 。故小潮对大潮的合成振幅之比为

$$\begin{aligned} & \frac{U_{M_2} - U_{S_2} + U_{2MS_2} - U_{2SM_2} + U_{3M2S_2} + \dots}{U_{M_2} + U_{S_2} - U_{2MS_2} - U_{2SM_2} + U_{3M2S_2} + \dots} \\ &= \frac{U_{M_2} - U_{S_2}}{U_{M_2} + U_{S_2}} \left[1 + U_{2MS_2} \left(\frac{1}{U_{M_2} - U_{S_2}} + \frac{1}{U_{M_2} + U_{S_2}} \right) \right. \\ & \quad \left. - (U_{2SM_2} - U_{3M2S_2}) \left(\frac{1}{U_{M_2} - U_{S_2}} - \frac{1}{U_{M_2} + U_{S_2}} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

对比值起着重要影响的是 $2MS_2$ 分潮的出现, 它使得上面的比值比 $(U_{M_2} - U_{S_2})/(U_{M_2} + U_{S_2})$ 增加得更快。

$2MS_2$ 具有与天文源分潮 μ_2 相同的频率, 在潮汐调和与分析中, 通常用 μ_2 表示的分潮中实际上包含着 $2MS_2$ 的重要影响。 μ_2 的天文相角是 M_2 天文相角的两倍减去 S_2 天文相角, 而 $2MS_2$ 的相角则由式(4.6)决定, 故通常 $2MS_2$ 和 μ_2 的位相差不多相反, 从而削弱了 μ_2 分潮。当 $2MS_2$ 的振幅超过 μ_2 时, 分析所得的迟角可以与 μ_2 本身的位相大约相反。

M_2-N_2 相互作用也产生类似效果。 $2MN_2$ 的频率与天文潮 L_2 的频率也刚好相同, 不过 L_2 的天文相角是两倍的 M_2 减去 N_2 再加 π , 故 $2MN_2$ 和 L_2 的位相通常是一致的, 从而加强了 L_2 。

$2MS_2$ 对 μ_2 , $2MN_2$ 对 L_2 的影响的一个实际例子, 可以参看作者对南浦调和常数的推算和讨论^[4]。

潮汐调和与分析中, 通常所用的交点因子 f 也将受到这种非线性作用的影响而变得不准确。例如纯调和分潮 M_2 的 Doodson 数为(200000), 交点因子主要由附属分潮(2000-10)造成, 它的平衡潮振幅为前者的 3.7%。由前面的讨论我们可以预料, 在浅水区域, 实际比值将要小于 3.7%, 同时由这两个分潮还将会产生随从分潮(200010), 并大大超过同一频率的天文源分潮。结果是实际的 f_{M_2} 值的变化幅度要小于理论的变幅, 这将引起分析和预报的误差。这种影响对全日潮可能会具有实际的重要性, 因为 O_1 和 K_1 的附属分潮具有颇大的相对振幅(分别为 19% 和 13%)。

对于更多个源潮波的情形, 我们将不作详细讨论了, 因为从二波相互作用的特点可以容易地推想多个源潮波相互作用的性状。这里还应指出一个有趣的事实, 即在实际潮汐中, O_1 , K_1 和 M_2 的频率具有下列关系: $\sigma_{O_1} + \sigma_{K_1} - \sigma_{M_2} = 0$ 。由式(2.27)的第五项(如 M_2 为最大分潮)或第六项(如 O_1 或 K_1 为最大分潮)可以得到一个频率为零的分量, 这个分量将会引起平均海面的倾斜, 其梯度力的方向与 $\cos(g_{O_1} + g_{K_1} - g_{M_2})$ 的符号相反 (g 为 x 方向潮流分量的迟角)。类似地, P_1 , K_1 , S_2 相互作用也能引起同样的效应, 但重要性小得多。这种效应可能会引起某些海区(例如海南岛附近)的定常流动。

五、摩擦的存在对非摩擦非线性的影响

1. 倍潮波的演变, 平方摩擦作用下激波发生的条件

今考察方程(1.1)中非摩擦的非线性项, 对于一个角速率为 σ_1 的单一源潮波, 用摄动方法给出的频率为 $2\sigma_1$ 的倍潮波的解是随着距离而线性增大的(见 Lamb, 1932, p. 281), 因而 Lamb 认为这个解只能适用于 $2\pi(H_1/h)(x/\lambda_1)$ 为小量的情形, 其中 λ_1 为 σ_1 波的波长。当这个量达到 $\frac{2}{3}$ 时, 将产生激波(见 Gallagher 和 Munk, 1971, p. 348)。上述结果是忽略了摩擦作用之后得到的, 下面我们将会看到, 如考虑了摩擦的影响, 情况有本质的不同。

对于单一波的情形, 根据式(3.12), 有

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \beta_1 U_1^2 \left[\sin(\sigma_{2,0}t - \beta_{2,0}x) - \frac{\mu_1}{2} \cos(\sigma_{2,0}t - \beta_{2,0}x) - \frac{\mu_1}{2} \right], \\ \frac{\partial(\zeta_1 u_1)}{\partial x} = \sqrt{\frac{h}{g}} \beta_1 U_1^2 \left[\sin(\sigma_{2,0}t - \beta_{2,0}x) - \mu_1 \cos(\sigma_{2,0}t - \beta_{2,0}x) - \frac{\mu_1}{2} \right], \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 $\sigma_{2,0} = 2\sigma_1$, $\beta_{2,0} = 2\beta_{10}$

$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}$ 中频率为零的项将引起平均海面 ζ_0 沿着 x 方向逐渐增加, 不过其量值不大。

事实上, 假定上面关系适用于 $(0, \infty)$, 则

$$\begin{aligned} \zeta_0(\infty) - \zeta_0(0) &= \int_0^\infty \frac{d\zeta_0}{dx} dx = \int_0^\infty \frac{\beta_1}{4g} \mu_1 U_1^2 dx \\ &= \frac{\beta_1}{4g} \mu_1(0) U_1^2(0) \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x\right)^{-3} dx = \frac{1}{4} \frac{H_1(0)}{h} H_1(0). \end{aligned} \quad (5.2)$$

类似地, $\frac{\partial(\zeta_1 u_1)}{\partial x}$ 中的最后一项造成了潮汐余流 u_0 , 且

$$u_0(\infty) - u_0(0) = \frac{1}{2} \frac{H_1(0)}{h} \cdot U_1(0). \quad (5.3)$$

下面较详细地讨论 $\sigma_{2,0}$ 波。由于(5.1)方括号内第二项相对于第一项为小量, 为了简便, 我们将它们略去。这时关于这个波的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{2,0}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta_{2,0}}{\partial x} = \frac{1}{2} \beta_1 U_1^2 \cos \left[(\sigma_{2,0}t - \beta_{2,0}x) + \frac{\pi}{2} \right] - \alpha_{2,0} U_1 u_{2,0}, \\ \frac{\partial \zeta_{2,0}}{\partial t} + h \frac{\partial u_{2,0}}{\partial x} = \sqrt{\frac{h}{g}} \beta_1 U_1^2 \cos \left[(\sigma_{2,0}t - \beta_{2,0}x) + \frac{\pi}{2} \right], \end{cases} \quad (5.4)$$

其中

$$\alpha_{2,0} = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{U_{2,0}^2}{U_1^2} + \dots\right) \frac{\gamma}{h}. \quad (5.5)$$

对方程(3.2)的处理方法可以类似地用于(5.4), 最后得到的满足边界条件 $U_{2,0}(0) = 0$ 的解为

$$\begin{cases} u_{2,0} = U_{2,0} \cos \left[(\sigma_{2,0}t - \beta_{2,0}x) + \frac{\pi}{2} \right], \\ U_{2,0} = \frac{3\beta_1 U_1(0)}{2(\alpha_{2,0} - \alpha_1)} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x\right)^{-1} - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x\right)^{-\alpha_{2,0}/\alpha_1} \right]. \end{cases} \quad (5.6)$$

与前面讨论过的随从潮波一样, 这个波也经历增长和消衰的过程, 其最大值发生在 $\mu_1(0) \beta_1 x = 2 \left[\left(\frac{\alpha_{2,0}}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1/(\alpha_{2,0} - \alpha_1)} - 1 \right]$ 处。若近似取 $\alpha_{2,0}/\alpha_1 = 1.5$, 则有 $\mu_1(0) \beta_1 x = \frac{5}{2}$ 。

此时 $\frac{U_{2,0}}{U_1} = \beta_1 / \frac{8}{3\pi} \frac{\gamma}{h} = \frac{3\pi}{8} \frac{\sigma_1}{\gamma} \sqrt{\frac{g}{h}} \approx 0.067\rho$, 其中 ρ 是非摩擦非线性对摩擦非线性的比值[见式(1.4)]。

一个令人感兴趣的问题是, 由于这个波的产生, 会不会造成激波。由(5.6)知

$$\frac{U_{2,0}}{U_1} = \frac{3\beta_1}{2(\alpha_{2,0} - \alpha_1)} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \mu_1(0) \beta_1 x\right)^{-\left(\frac{\alpha_{2,0}}{\alpha_1} - 1\right)} \right], \quad (5.7)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 这个比值趋于最大值 $\frac{3\beta_1}{2(\alpha_{2,0} - \alpha_1)}$ 。 $U_{2,0}/U_1$ 标志着潮波进入浅水区域后遭受到的畸变的大小。在无摩擦情况下, 激波发生在 $2\pi(H_1/h)(x/\lambda_1) = \frac{2}{3}$ 处, 此时 $U_{2,0}/U_1 = \frac{1}{2}$, 因此可以认为, 在存在摩擦的情况下, $U_{2,0}/U_1$ 也必须达到 $\frac{1}{2}$, 激波才能出现, 于是可以推论, 即在均匀沟渠中能否出现激波的临界条件是

$$\frac{3\beta_1}{\alpha_{2,0} - \alpha_1} = 1. \quad (5.8)$$

根据式 (3.9), 知 $\alpha_{2,0} - \alpha_1 = \frac{\gamma}{h} (C_{0,1} \frac{U_1}{U_{2,0}} - C_{1,0})$ 。不过现在 $\sigma_{2,0}/\sigma_1 = 2$ 是有理数, 摩擦力展开式中频率 $3\sigma_1 - 2\sigma_{2,0}$, $5\sigma_1 - 2\sigma_{2,0}$, \dots 等于 σ_1 ; $4\sigma_1 - \sigma_{2,0}$, $4\sigma_1 - 3\sigma_{2,0}$, \dots 等于 $\sigma_{2,0}$, 这些频率的项起着不大的订正作用。我们将考虑其中有实际意义的 $3\sigma_1 - 2\sigma_{2,0}$ 和 $4\sigma_1 - \sigma_{2,0}$ 两个分量。

由式 (5.5) 知, 若 σ_1 波的位相为 $\phi_1 = \sigma_1 t - \beta_1 x$, 则 $u_{2,0}$ 的位相为 $\phi_{2,0} = 2\phi_1 + \frac{\pi}{2}$ 。故摩擦力展开式中频率为 σ_1 , $\sigma_{2,0}$, $3\sigma_1 - 2\sigma_{2,0}$, $4\sigma_1 - \sigma_{2,0}$ 的各分量的位相分别为 ϕ_1 , $2\phi_1 + \frac{\pi}{2}$, $-\phi_1 - \pi$, $2\phi_1 - \frac{\pi}{2}$ 。由此可得 $\alpha_{2,0} - \alpha_1 = \frac{\gamma}{h} \left[\frac{U_1}{U_{2,0}} (C_{0,1} - C_{4,-1}) - (C_{1,0} - C_{3,-2}) \right]$ 。当 $U_{2,0}/U_1 = 0$ 时, 可以由表 2 得出 $\alpha_{2,0} - \alpha_1 = \left[\left(\frac{4}{\pi} + \frac{4}{15\pi} \right) - \left(\frac{8}{3\pi} + 0 \right) \right] \frac{\gamma}{h} = \frac{8}{5\pi} \frac{\gamma}{h} = 0.509 \frac{\gamma}{h}$ 。当 $U_{2,0}/U_1 = 0.5$ 时, 由表 3 可得 $\alpha_{2,0} - \alpha_1 = [2(0.657 + 0.026) - (1.005 + 0.022)] \frac{\gamma}{h} = 0.339 \frac{\gamma}{h}$ 。由于在 $\sigma_{2,0}$ 波的传播过程中, $U_{2,0}$ 从零增加到 $\frac{1}{2} U_1$, 故我们取上两个值的平均, 即 $\alpha_{2,0} - \alpha_1 = 0.424$ 。于是以 $\beta_1 = \sigma_1/\sqrt{gh}$ 代入, 上述临界条件变为

$$\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{\sigma_1}{\gamma} = 0.141. \quad (5.9)$$

这个条件也可写作

$$\rho = 2.5. \quad (5.10)$$

图 1¹⁾ 的阴影部分表示在该条件下激波可能发生。若取 $\sigma_1 = 1.4 \times 10^{-4}$ 秒⁻¹, $g = 9.8$ 米·秒⁻², 则产生激波的条件为 $h > 1 \times 10^7 \times \gamma$ (米)。实际观测得到的 γ 值变化于 2×10^{-3} 上下, 这样看来, 浅的均匀沟渠中不会产生激波。这个结论与无摩擦的情况大不相同, 看起来似乎很值得怀疑。因此, 这里想提一下 Gallagher 和 Munk (1971, p.355) 的一个数值实验结果。他们取 $h = 16$ 米, $H_1(0) = 1$ 米, 对长为 $L = 750$ 公里的半封闭沟渠进行计算。在 $\gamma = 0$ 的情况下, 在沟渠顶端波形接近于破碎, 但在 $\gamma = 0.003$ 的情况下, 不仅潮汐振幅减小了, 而且波形没有任何行将破碎的迹象。这表明摩擦对激波的产生起着严重的抑制作用。这样看来, 似乎怒潮的产生必须与地形的改变联系起来。

当 $\rho > 2.5$ 时, 我们可以由式 (5.7) 令 $U_{2,0}/U_1 = \frac{1}{2}$ 来计算激波发生的地点。这时

1) 见本刊 11 卷 2 期, 第 99 页。

水深要足够大,而且算得的地点要比无摩擦情况下远得多,以致在实际海洋中不可能存在这样长的海域。

上面我们说没有足够的深度激波便不能出现,但这并不表明在浅水区 $\sigma_{2,0}$ 波成长得较深水区慢。实际上在开始阶段,水越浅, $\sigma_{2,0}$ 波成长得越快。因为若 $\mu_1(0)\beta_1x$ 为小量,式(5.7)给出

$$\frac{U_{2,0}}{U_1} \approx \frac{3\beta_1}{2(\alpha_{2,0} - \alpha_1)} \left(\frac{\alpha_{2,0}}{\alpha_1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \mu_1(0)\beta_1x \approx \frac{3}{4} \frac{H_1(0)}{h} \beta_1x,$$

这与无摩擦的结果相同(参看 Lamb, 1932, p. 281)。

2. 半月潮的加强

Munk 和 Cartwright (1966) 曾经把 Airy 关于浅水潮的摄动解推广到多个源潮波的情况,他们发现由 σ_1 波和 σ_2 波相互作用产生的 $\sigma_{1,-1}$ 波和 $\sigma_{1,1}$ 波的振幅比是 $|\sigma_1 - \sigma_2|/(\sigma_1 + \sigma_2)$ 。特别对 M_2 和 S_2 , 它们产生的随从潮波 MS_f 对 MS_4 的振幅比应当只有 0.02。但在实际上,许多江河中观测到的 MS_f 对 MS_4 的振幅比远远超过 0.02, 而且 MS_f 这个周期为半个朔望月的振动常常相当明显,以致不可能把它归结为噪声。关于这方面的观测结果, Defant (1961) 曾作过综合性的描述。 $\sigma_{1,-1}$ 波的理论与实际的不符可以由摩擦效应予以解释。

在存在摩擦的情况下, σ_1 和 σ_2 源潮波可以用式(3.12)表示。而这时,方程(1.1)中的非摩擦非线性项为

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial x}, \\ \frac{\partial (\zeta u)}{\partial x} = \frac{\partial (\zeta_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\zeta_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\zeta_1 u + \zeta_2 u_1)}{\partial x}. \end{cases} \quad (5.11)$$

现在我们关心的是最后一项,将式(3.2)代入,准确到 $O(\mu)$, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial x} = \frac{1}{2} U_1 U_2 \left\{ \beta_{1,1} \sin(\sigma_{1,1}t - \beta_{1,1}x) - \frac{\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2}{2} \cos(\sigma_{1,1}t - \beta_{1,1}x) \right. \\ \quad \left. + \beta_{1,-1} \sin(\sigma_{1,-1}t - \beta_{1,-1}x) - \frac{\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2}{2} \cos(\sigma_{1,-1}t - \beta_{1,-1}x) \right\}, \\ \frac{\partial (\zeta_1 u_2 + \zeta_2 u_1)}{\partial x} = \sqrt{\frac{h}{g}} U_1 U_2 \left\{ \beta_{1,1} \sin(\sigma_{1,1}t - \beta_{1,1}x) - \left[\frac{\mu_1 (3\beta_1 + \beta_2)}{4} \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{\mu_2 (\beta_1 + 3\beta_2)}{4} \right] \cos(\sigma_{1,1}t - \beta_{1,1}x) + \beta_{1,-1} \sin(\sigma_{1,-1}t - \beta_{1,-1}x) \right. \\ \quad \left. - \left[\frac{\mu_1 (3\beta_1 - \beta_2)}{4} + \frac{\mu_2 (3\beta_2 - \beta_1)}{4} \right] \cos(\sigma_{1,-1}t - \beta_{1,-1}x) \right\}. \end{cases} \quad (5.12)$$

比较(5.12)和(5.1),可知 $\sigma_{1,1}$ 波的大小约为 $\sigma_{2,0}$ 波的 $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1} \frac{U_2}{U_1}$ 倍,这一点与无摩擦的情况相近。

在 σ_1 和 σ_2 很接近的情况下, $|\beta_1 - \beta_2| \ll \beta_1 + \beta_2$ 。这时(5.12)中,对 $\sigma_{1,1}$ 波,花括号内第一项为主要项;对 $\sigma_{1,-1}$ 波,第四项为主要项。而第四项对第一项的系数之比都约为 $\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2)$ 。若用 μ 记 μ_1 和 μ_2 的平均值,则比值为 $\frac{\mu}{2}$ 。

此外,本来在(1.1)的运动方程中,摩擦力应写成

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{h+\zeta}|u|u &= \frac{\gamma}{h}|u|u - \frac{\zeta}{h} \frac{\gamma}{h}|u|u + \dots \\ &= \frac{\gamma}{h}|u|u - \frac{1}{h}(\zeta_1 + \zeta_2)(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots) + \dots \\ &= \frac{\gamma}{h}|u|u - \frac{1}{h}(k_1 \zeta_1 u_1 + k_2 \zeta_2 u_2 + k_1 u_1 \zeta_2 + k_2 u_2 \zeta_1 + \dots) + \dots, \end{aligned} \quad (5.13)$$

其中最后两项包含频率 $\sigma_{1,1}$ 和 $\sigma_{1,-1}$ 的振动,利用式(3.10)和(3.7)第三式可得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h}(k_1 u_1 \zeta_2 + k_2 u_2 \zeta_1) &= -\frac{\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2}{2} U_1 U_2 \cos(\sigma_{1,1} t - \beta_{1,1} x) \\ &\quad - \frac{\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2}{2} U_1 U_2 \cos(\sigma_{1,-1} t - \beta_{1,-1} x), \end{aligned} \quad (5.14)$$

其值比 $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x}$ 中的第二、四项大一倍。考虑到这两项后, $\sigma_{1,-1}$ 波和 $\sigma_{1,1}$ 波的比值应当修正为大约 $5/6 \mu_0$ 。

我们上面考虑的是 μ 为小量的情况,在摩擦作用很显著的江河中, μ 值常可达量级1。我们可以推测,这时 $\sigma_{1,-1}$ 波和 $\sigma_{1,1}$ 波的振幅可以达到相同的量级。需要指出的是, $\sigma_{1,-1}$ 波的加强与摩擦作用是不是线性的没有关系。

从式(5.12)可看到,由其中第四项引起的 $\sigma_{1,-1}$ 波的位相为 $\phi_{1,-1} = \phi_1 - \phi_2$ 。如考虑 M_2 - S_2 相互作用,则大潮时有 $\phi_{M_2} \approx \phi_{S_2}$, 从而有 $\phi_{\bar{M}S_1} \approx 0$, 即此时 $\bar{M}S_1$ 分潮为高潮。因此江河中 $\bar{M}S_1$ 分潮能使大潮期间的日平均海面高于小潮期间。

由式(5.13)还附带可看出,由于增加了 $-\frac{1}{h} k_1 \zeta_1 u_1$ 这一项,式(5.2)应修改为

$$\zeta_0(\infty) - \zeta_0(0) = \frac{3}{4} \frac{H_1(0)}{h} H_1(0). \quad (5.15)$$

参 考 文 献

- [1] 方国洪, 1974. 潮汐分析和预报的准调和分潮方法 I. 准调和分潮. 海洋科学集刊 9:1—15.
- [2] 方国洪, 1979. 黄海潮能的消耗. 海洋与湖沼 10(3):200—213.
- [3] 方国洪, 1980. 潮汐摩擦的非线性效应(I). 海洋与湖沼 11(2):98—108.
- [4] Defant, A., 1961. Physical Oceanography, Vol. II. Pergamon Press, Oxford. pp. 457—464.
- [5] Gallagher, B. S. and W. H. Munk, 1971. Tides in shallow water. Spectroscopy. Tellus 23(4—5): 346—365.
- [6] Garrett, C. J. R., 1972. Tidal resonance in the Bay of Fundy and Gulf of Maine. Nature 238(5365): 441—443.
- [7] Jeffreys, H., 1970. The Earth (5th ed.). Cambridge. pp. 301—304.
- [8] Lamb, H., 1932. Hydrodynamics (6th ed.). Cambridge. p. 281.
- [9] Munk, W. H. and D. E. Cartwright, 1966. Tidal spectroscopy and prediction. Phil. Tran. Roy. Soc. A259: 533—581.

NONLINEAR EFFECTS OF TIDAL FRICTION (II)*

Fang Guohong

(Institute of Oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

The present part is a continuation of the previous part of the paper and contains three sections.

Sec. 3 deals with the decay of the primary waves under the action of quadratic friction. The governing equations take the form of (3.1), the equations for the wave with frequency σ , are then given by (3.2), which can be transformed into (3.5) assuming that the progressive wave is represented by (3.3). If the friction is weak, namely the ratio μ [see (3.10)] is small, the Eq. (3.5) may be simplified in the form of (3.7). The components of the friction with the frequencies equaling to the primary waves are taken from the development of friction, and the solutions (3.12) of the primary waves are obtained (where only two primary waves are considered for simplicity). The solutions show that when the waves travel together, the smaller one will decay with a faster rate. The ratio of the decay exponents α_2/α_1 depends on the amplitude ratio $s=U_2/U_1$ of the waves, and is always greater than 1 for $s < 1$ (Fig. 2), as a consequence, the amplitude ratio U_2/U_1 will get smaller and smaller when the waves progress, and tends to zero when $x \rightarrow \infty$.

Sec. 4 discusses the evolution of the frictional subordinate waves. In the development of friction, there are terms with frequencies different from those of the primary waves, these terms cause the occurrence and growth of the subordinate waves, such as the waves $2\sigma_1-\sigma_2$, $2\sigma_2-\sigma_1$, $3\sigma_1$, ... but once they occur, the friction will resist the growth. For every subordinate wave, there are two principal forces acting on it, one comes from the nonlinear effects of the primary waves and supplies the subordinate wave with energy, the other is the resistance, which removes the energy from the subordinate wave. As a result, the subordinate wave grows in the beginning, and reaches its maximum somewhere, then decays and vanishes at last. The approximate solutions of the waves $3\sigma_1$, $2\sigma_1-\sigma_2$ and $2\sigma_2-\sigma_1$ (for $\nu=3, 0; 2, -1$ and $-1, 2$) are given in the Eqs. (4.3), (4.6-7) and (4.10). It is pointed out that for the M_2-S_2 interaction, the subordinate wave $2M\bar{S}_2$ has the same frequency as the primary wave μ_2 , and the phase of $2M\bar{S}_2$ is generally opposite to that of μ_2 . In some regions, the constituent $2M\bar{S}_2$ may exceed μ_2 and the phase obtained from the analysis of observations will be opposite to the phase of the true μ_2 . For the M_2-N_2 interaction, the wave $2M\bar{N}_2$ has also the same frequency as L_2 and enhances the later, because their phases are generally consistent. It is also pointed out that the values of the nodal factors f (which is in common use in analysis and prediction of the tides) should have some deviation from the theoretical ones because of the different decay rates of the primary waves and the occurrence of the fric-

*Contribution No. 529 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.

tional subordinate waves.

The friction not only yields subordinate waves by itself, it may also have some important influences upon the subordinate waves excited by the non-frictional nonlinearity. Sec. 5 exhibits two of them. It is noted that in the absence of friction, the 2σ wave caused by non-frictional nonlinearity will grow rapidly and gains an amplitude as large as a half of that of the primary wave when shock wave occurs. Under the action of quadratic friction, the 2σ wave can not get such an amplitude unless the condition that $\rho > 2.5$ is satisfied. For semi-diurnal waves, this means that the depth of the canal should be greater than ca. $1 \times 10^7 \times \gamma^2$ (metres). But the canal having such a depth always has not enough length which allows the 2σ wave to grow, because the nonlinearity is rather weak in this case. It seems that the occurrence of the bore is almost practically impossible in a homogeneous canal. Another influence is as follows: In the absence of friction, the amplitude ratio of the wave $\sigma_1 - \sigma_2$ to the wave $\sigma_1 + \sigma_2$ is only $|\sigma_1 - \sigma_2| / (\sigma_1 + \sigma_2)$, and this implies that the amplitude of MS_1 should be about $0.02 MS_4$. But if the friction is taken into account, the amplitude ratio will increase to $5/6 \mu$. We may expect that the amplitude of MS_1 will be close to or even exceed MS_4 in the rivers, where the value of μ usually has an order of magnitude of 1.