

非线性流函数波浪理论的求解*

刘书攻 李彦彬 韩洁芬

(渤海石油公司设计研究院)

在海洋工程设计中,往往要求包括极限破碎波在内的极为非线性的波浪资料。为提供这些资料,目前已有多种非线性波浪理论可供使用,其中多数最终给出速度势函数 $\phi(x, z, t)$ 的表达式和波面方程,由此来研究与波浪相遇的结构物的运动性能,或者计算作用于这类结构物上的波浪力。这些理论包括用于近岸和浅水的孤立波理论和椭圆余弦波理论,主要用于深水 and 过渡水深的高阶斯托克斯波浪理论和流函数波浪理论,此外,还有扩展速度势理论和直接数值波浪理论等。在所有这些波浪理论中,流函数波浪理论对整个深水、过渡水深及部分浅水都提供了最好的边界条件拟合^[2]和最好的实验可靠性^[9]。就此而论,流函数波浪理论不但比高阶斯托克斯波浪理论更精确,而且由图4^[7]可见,流函数波浪理论适用的海况范围远比高阶斯托克斯波浪理论宽阔得多。同目前在海洋工程波浪力计算中用的比较广泛的五阶斯托克斯波浪理论相比,流函数波浪理论还具有很容易扩展到任意阶数的优点,但它远没有得到像五阶斯托克斯波浪理论那样广泛的应用,这是因为流函数解的待定系数的确定十分复杂。可以相信,一旦寻求到求解这些系数的方法之后,流函数波浪理论就有可能得到广泛的应用。为此,本文不但介绍了这些系数的求解方法,而且列出了这些系数的初值表达式,同时还给出了求解步骤及主要数学运算,以利流函数波浪理论的应用。

一、问题的数学提法

求解液体波动的解析函数问题,依照数学的观点可以归结为求解边界值问题。也就是说,在液体波动内部存在着为某个函数必须满足的运动微分方程;在液体波动的边界上存在着为这个函数必须满足的边界条件。如果假定在均匀不变水深中沿 x 正方向传播的表面波,其波动无旋,流体无粘性且不可压缩,则上述边界值问题的二维形式可写成

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \phi = \nabla^2 \cdot \phi = 0 & (1) \\ & w = 0, \quad z = -d & (2) \\ (一) \quad & \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \quad z = \eta(x, t) & (3) \\ & \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2g} (u^2 + w^2) + \eta(x, t) - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad z = \eta(x, t) & (4) \end{aligned}$$

这里,

* 本工作得到了周恒教授的指导,文圣常教授、刘应中副教授和李磊同志对本文提出过宝贵意见,在此深表谢意。

收稿日期:1982年10月22日。

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (5)$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

上述各式中, ϕ ——速度势函数; ψ, ψ_η ——分别为流函数和自由表面上的流函数; u, w ——分别为水质点速度的水平分量和垂直分量; $\eta(x, t)$ ——波剖面; p ——压力; ρ ——水的质量密度; g ——重力加速度; x, z ——分别为水平坐标和垂直坐标; d ——平均水深。方程(1)为 ϕ 或 ψ 所满足的运动微分方程; (2) 为底部边界条件; (3) 为运动学自由表面边界条件; (4) 为动力学自由表面边界条件。

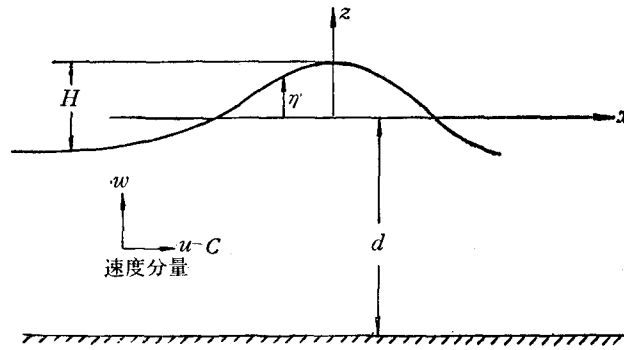


图1 波动系统坐标

如果选取图1所示的波动坐标系

$$x_1 = x - Ct$$

$$z_1 = z$$

其中

$$C = \frac{L}{T} \quad (7)$$

为沿 x 正方向的波形传播速度(这里 L 为波长; T 为波浪周期)。在省略角标“1”后,上述非定常边界值问题(一)就简化为下列定常问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0 & (8) \\ w = 0, z = -d & (9) \end{cases}$$

$$(二) \begin{cases} w = (u - C) \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ 或 } \psi_\eta = \text{const.}, z = \eta(x) & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta(x) + \frac{1}{2g} [(u - C)^2 + w^2] - \frac{C^2}{2g} = \text{const.} = Q, z = \eta(x) & (11) \end{cases}$$

$$u - C = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (12)$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (13)$$

需要指出的是,在做上述变换过程中,令方程(4)中的压力为常值(或为大气压力),当波

高、水深、波长(或周期)确定后, $\frac{C^2}{2g}$ 可视作常数, 故可将 $p/\rho g$ 和 $C^2/2g$ 并入常数 Q 中成为新的常数 Q_1 , 而 Q_1 为待定值, 故可记作 Q 。这样, 如果将方程 (11) 的右端展开即可看到, 方程 (11) 中不再保留 $C^2/2g$, 这样处理将给选取 Q 的平均值 $\bar{Q}$ 带来方便。

二、边界值问题(二)的求解

边界值问题 (二) 是经典的非线性无旋水波问题的通用方程组。对这样的非线性问题, 要得到普遍条件下的精确解是比较困难的。但是, 在允许做某种近似的情况下, 仍可得令人比较满意的结果。求解这类问题的基本思路是: 根据问题的要求, 先给出满足运动微分方程 (8) 以及尽可能地满足部分边界条件的 ϕ 或 ϕ 的表达式, 然后根据未被满足的边界条件确定 ϕ 或 ϕ 的表达式中的未知参量。由此, Dean 于 1965 年首先对上述边界值问题给出了如下形式的流函数解^[2]:

$$\phi(x, z) = \frac{L}{T} z + \sum_{n=1}^{NN} X(n) \sinh \left[\frac{2\pi n}{L} (d + z) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \quad (14)$$

置 $z = \eta(x)$, 由上式即得到波面方程:

$$\eta(x) = \frac{T}{L} \phi_\eta - \frac{T}{L} \sum_{n=1}^{NN} X(n) \sinh \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \quad (15)$$

这里 NN 为表达式的阶数, 即级数式的项数; $X(n)$ 为待定系数。在此, L , $X(n)$ 和 ϕ 均作为未知量出现。不难验证, 流函数解 (14) 对 L , $X(n)$ 和 ϕ_η 为任意值都能完全满足边界值问题 (二) 的运动微分方程 (8) 及边界条件 (9)–(10), 唯一不满足边界条件 (11)。因此, 问题便归结为寻求在给定波浪参数(波高 H ; 波浪周期 T 和水深 d) 情况下, 流函数解 (14) 能最好地满足方程 (11) 的 ϕ_η , L 和 $X(n)$, 并使得由迭代得到的波高与给定波高之间的偏差被限定在允许的范围内。

1. ϕ_η 的确定

前已指出, ϕ_η 是自由表面上的流函数, 因为自由表面也是一条流线, 故 ϕ_η 为常值。若选取 x 轴于静止水平面上, 则在一个周期内的自由水表面的平均位移为零, 即

$$\int_0^L \eta(x) dx = 0 \quad (16)$$

将波面方程 (15) 代入上式, 则有

$$\phi_\eta = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \sum_{n=1}^{NN} X(n) \sinh \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] dx \quad (17)$$

这个积分可用辛普生方法求出。

2. L 和 $X(n)$ 的确定

液体波动的动力学自由表面边界条件 (11) 实际上就是当自由水表面上的压力为常值时的柏努利方程。当将方程 (14) 和 (15) 代入 (11) 后不难看出

$$Q = f(C, L, T, d, \phi_\eta, X(n), x)$$

而 $C = L/T$, d 和 T 为给定的量, 由方程 (17) 可知 ϕ_η 为常量, 于是, 对于在给定了波浪参数 H , d 和 T 的情况下, 则有

$$Q = f(L, X(n), x)$$

这里有两个问题: 一是 Q 为未知量; 二是 Q 为常量, 应与 x 无关, 这后一要求可以通过“平均”来满足, 即定义:

$$\bar{Q} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J Q_i \quad (18)$$

这里 Q_i 表示 Q 依 x 等间隔的值, $\bar{Q}$ 为一个波长(或一个周期)内 Q_i 的平均。显然, 由此引起的误差可表示为

$$E = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J (Q_i - \bar{Q})^2 \quad (19)$$

于是问题便归结为求满足方程(19)最小值问题的 L 和 $X(n)$ 。

求最小值问题有多种方法, 如果计算机的容量不大, 速度不高, 可采用伽辽金方法。这里采用通常的最小二乘法, 即:

$$\frac{\partial E}{\partial L} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial X(n)} = 0 \quad (21)$$

注意到方程(11)和(15), 可发现 Q 中含有未知参量 L 和 $X(n)$ 的非线性项, E 不是 L 和 $X(n)$ 的二次函数, 因此这里属于非线性最小二乘方问题, 可利用摄动法将其线性化。

三、摄动法^[1]

液体波动微分方程, 本质上是非线性的, 很少有精确解, 为求解这类非线性方程, 不得不借助于近似方法寻求近似解, 或者借助于数值方法寻求数值解, 或者将其结合起来求解。

摄动法是求近似解的有效方法之一。首先把方程和定解条件无量纲化, 然后选择一个无量纲摄动量。这个摄动量可以出现在微分方程中, 也可以出现在定解里, 或者同时出现在方程和定解条件内, 甚至还可以人为地引入求解方法里。在选定摄动量之后, 便可对未知函数做摄动展开。在确定了未知参量的初值之后, 就可得到一个近似解。以此做为一系列逐步近似的第一步来进一步对所得结果加以改进。基于上述思想, 这里选取 ΔL 和 $\Delta X(n)$ 做为流函数解中未知参量 L 和 $X(n)$ 的摄动量, 利用导数展开法, 第 $(k+1)$ 次迭代的未知函数 Q_i 展开为:

$$Q_i^{(k+1)} = Q_i^{(k)} + \sum_{n=1}^{NN} \frac{\partial Q_i^{(k)}}{\partial X(n)} \Delta X(n) + \frac{\partial Q_i^{(k)}}{\partial L} \Delta L \quad (22)$$

其中,

$$\frac{\partial Q}{\partial X(n)} = \frac{\partial Q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X(n)} + \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X(n)} + \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial X(n)} \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial L} + \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial L} + \frac{\partial Q}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial L} + \frac{\partial Q}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial L} \quad (24)$$

这里为简便而略去了 Q 的上、下脚标。上述二式中的 $\partial Q/\partial \eta$, $\partial Q/\partial u$, $\partial Q/\partial w$, $\partial Q/\partial C$ 可由方程(11)得到, 而 $\partial \eta/\partial X(n)$, $\partial u/\partial X(n)$, $\partial w/\partial X(n)$ 等可分别由方程(15)、(12)、(13)和(7)得到。

当以摄动量描述最小二乘方问题时,则有

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta L} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta X(n)} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, NN \quad (26)$$

方程(25)和(26)表示含有 $NN + 1$ 个未知量的 $NN + 1$ 个方程的线性代数方程组,故可求解 ΔL 和 $\Delta X(n)$ 。如果假定第 (k) 次迭代的试算解为已知,则有

$$X^{(k+1)}(n) = X^{(k)}(n) + \Delta X(n) \quad (27)$$

$$L^{(k+1)} = L^{(k)} + \Delta L \quad (28)$$

问题在于如何给出 $X(n)$ 和 L 的初值。

综上所述,所谓在给定波浪参数 H , T 和 d 情况下的流函数波浪理论,就是求由方程(19)确定的最小值问题的 L , ϕ_η 和 $X(n)$, 为此必须给出这些未知参量的初始值。

四、未知参量初始值的确定

尽可能合理地给出未知参量初始值,不仅对计算机时间有一定的影响,而且也是保证计算不致发散的条件之一。确定未知参量的初始值一般有两种途径:首先尽可能从问题的物理意义上予以确定,这要取决于人们对问题物理意义理解的程度;其次是采用试算的办法。当问题的未知参量很少时,试算法也是行之有效的。但当未知参量较多时,用试算法就会遇到困难。本文对这两种方法做到了合理的运用。在确定未知参量 L , ϕ_η 和 $X(n)$ 的初值时,采用了前一种方法,在选取未知函数 $\bar{Q}$ 值时,采用了试算法。

未知参量 L 的初值可根据有限水深的线性波浪理论得到,即

$$L^{(0)} = \frac{gT^2}{2\pi} \tan h \frac{2\pi d}{L} \quad (29)$$

考虑到自由水表面也是一条流线,故取

$$\phi_\eta^{(0)} = 0 \quad (30)$$

这样又可从波面方程(15)得到

$$\eta(x) = -\frac{T}{L} \sum_{n=1}^{NN} X(n) \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right]$$

波高可近似地取为

$$H = \{\eta\}_* - \{\eta\}_\#$$

将上述波面方程在 $z = 0$ (近似地看作 $\eta = 0$) 展成泰勒级数,且取零阶近似,那么当取 $x = 0$ 时出现波峰,则在 $x = L/2$ 时出现相邻波谷,于是

$$X^{(0)}(n) = \frac{HL}{2T} \frac{1}{\sin h \frac{2\pi n}{L} d} \quad n = 1, 2, \dots, NN$$

近似地取

$$X^{(0)}(1) = \frac{HL}{2T} \frac{1}{\sin h \frac{2\pi d}{L}} \quad X^{(0)}(n) = 0, n = 2, 3, \dots, NN。$$

诚然,上述作法是相当粗糙的,但求解过程表明是行之有效的。

求解方程 (19) 这样最小值问题的关键之一在于如何选取合适的 $\bar{Q}$ 值,以使在保证精度要求的情况下尽快地逼近所给定的波高 H , 这里做了如下处理。

首先,这里与有些文献^[2-4]不同,在动力学自由表面边界条件中没有保留 $C^2/2g$ 项,即本文中的 Q 不含有 $C^2/2g$ 。依照此种作法,通过试算很容易找到对应于各种波浪参数情况下的 $\bar{Q}$ 值的变化范围—— $\bar{Q}$ 值被限定在一个很小的范围内。

其次, Q 表示波动能量的积蓄,在柏努利方程中代表“总能”或“总头”,是波高的度量,随着 H 的增大而增大。而 $\bar{Q}$ 为 Q 的理想值,由波浪参数 H , T 和 d 所决定,即

$$\bar{Q} = F(H, T, d)$$

或

$$\tilde{H} = G(\bar{Q}, T, d)$$

这里, $\tilde{H}$ 为计算得到的波高。对于一组确定的 $\bar{Q}$, T 和 d , 通过迭代即可得到 $\tilde{H}$ 。当给定海况时, H , T 和 d 即已确定, 欲使 $\tilde{H}$ 与 H 拟合, 只能不断地调整 $\bar{Q}$ 直至满足要求为止。虽然依照有些文献^[2-4]的作法,将 $\bar{Q}$ 进行摄动展开也可求解,但 $\tilde{H}$ 与 H 的拟合速度并非令人满意。我们基于 $\tilde{H}$ 为 $\bar{Q}$ 的单调增函数以及在 $\bar{Q}$ 为定值情况下, $\{\tilde{H}^k\}$ 为递增序列这两个基本事实,卓有成效地进行了 $\bar{Q}$ 的优选,使 $\tilde{H}$ 与 H 的拟合可达到所要求的任意精度,同时还大大缩短了计算时间。

五、求解步骤与计算实例

为便于求解,现将求解步骤概括如下。

1. 根据给定的波浪参数 (H , T , d), 由图 2^[8] 确定流函数波浪理论的阶数 NN 。

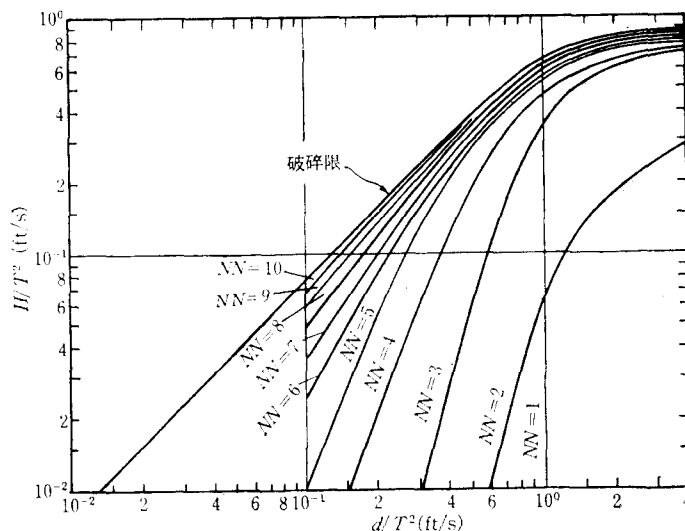


图 2 流函数波浪理论的阶数

2. 由方程 (29) — (31) 确定未知参量初值。
3. 将一个波长 L (或一个周期 T) 区间等分, 取分点 $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_J$, 代入波面方

程 (15), 利用牛顿法求出 $\eta_j (j = 1, 2, \dots, J)$, 于是有

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_J \\ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_j, \dots, \eta_J \\ \tilde{H} = \text{Max}\{\eta_j\} - \text{Min}\{\eta_j\} \end{aligned}$$

4. 根据式 (30) 确定的 $\phi_j^{(0)} = 0$, 由式 (17) 计算 ϕ_{η_0}

5. 由式 (14) 以及式 (12), (13) 解得

$$\begin{aligned} u - C &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= -\frac{L}{T} - \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \cos h\left[\frac{2\pi n}{L}(d+z)\right] \cos\left[\frac{2\pi n}{L}x\right] \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= -\frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \sin h\left[\frac{2\pi n}{L}(d+z)\right] \sin\left[\frac{2\pi n}{L}x\right] \end{aligned}$$

将上述二式以及式 (7) 和由第 3 步得到的 η_j 代入方程 (11) 即可解得 Q_i 。

6. 将式 (22) 代入式 (19) 求导得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \Delta L} &= \frac{2}{J} \sum_{j=1}^J (Q_j - \bar{Q}) \frac{\partial Q_j}{\partial \Delta L} \\ &= \frac{2}{J} \sum_{j=1}^J \left\{ Q_j^{(k)} + \sum_{n=1}^{NN} \frac{\partial Q_j^{(k)}}{\partial X(n)} \Delta X(n) + \frac{\partial Q_j^{(k)}}{\partial L} \Delta L \right. \\ &\quad \left. - \bar{Q} \right\} \frac{\partial Q_j^{(k)}}{\partial L} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \Delta X(n)} &= \frac{2}{J} \sum_{j=1}^J (Q_j - \bar{Q}) \frac{\partial Q_j^{(k)}}{\partial \Delta X(n)} = \frac{2}{J} \sum_{j=1}^J \left\{ Q_j^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{NN} \frac{\partial Q_j^{(k)}}{\partial X(n)} \Delta X(n) + \frac{\partial Q_j^{(k)}}{\partial L} \Delta L - \bar{Q} \right\} \cdot \frac{\partial Q_j^{(k)}}{\partial X(n)} = 0 \end{aligned}$$

其中的 $\partial Q / \partial X(n)$, $\partial Q / \partial L$ 由方程 (23), (24) 给出。上述二式联立解得 ΔL 和 $\Delta X(n)$ 。

而方程 (23), (24) 中的各项如下得到:

由方程 (11) 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \eta} &= 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{1}{g} (u - C) = -\frac{1}{g} \left\{ \frac{L}{T} + \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \right. \\ &\quad \left. \times \cos h\left[\frac{2\pi n}{L}(d+\eta)\right] \cos\left[\frac{2\pi n}{L}x\right] \right\} \\ \frac{\partial Q}{\partial w} &= \frac{1}{g} w = -\frac{1}{g} \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \sin \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ \frac{\partial Q}{\partial C} &= -\frac{1}{g} u = \frac{1}{g} \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \\ & \times \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \end{aligned}$$

由方程 (15) 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x(n)} &= \frac{-\frac{T}{L} \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right]}{1 + \frac{2\pi T}{L^2} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right]} \\ \frac{\partial \eta}{\partial L} &= \frac{1}{1 + \frac{2\pi T}{L} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right]} \\ & \cdot \left\{ -\frac{T}{L^2} \phi_\eta + \frac{T}{L^2} \sum_{n=1}^{NN} X(n) \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \right. \\ & + \frac{2\pi T}{L^3} (d + \eta) \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ & \left. - \frac{2\pi T}{L^3} x \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \sin \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \right\} \end{aligned}$$

由第 5 步得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{1}{T} \\ \frac{\partial u}{\partial L} &= \frac{2\pi}{L^2} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ & + \frac{4\pi^2}{L^3} (d + \eta) \sum_{n=1}^{NN} n^2 X(n) \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ & - \frac{4\pi^2}{L^3} x \sum_{n=1}^{NN} n^2 X(n) \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \sin \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ \frac{\partial w}{\partial L} &= \frac{2\pi}{L^2} \sum_{n=1}^{NN} nX(n) \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \sin \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ & + \frac{4\pi^2}{L^3} (d + \eta) \sum_{n=1}^{NN} n^2 X(n) \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \sin \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ & + \frac{4\pi^2}{L^3} x \sum_{n=1}^{NN} n^2 X(n) \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \\ \frac{\partial u}{\partial X(n)} &= -\frac{2\pi n}{L} \cos h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \cos \left[\frac{2\pi n}{L} x \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial X(n)} = -\frac{2\pi n}{L} \sin h \left[\frac{2\pi n}{L} (d + \eta) \right] \sin \left[\frac{2\pi n}{L} x \right]$$

至此完成了整个求解过程。应当指出的是,我们已将一个波长 L 区间等分成 J 个点,以上各量均应理解为任意分点处的;又,我们是求柏努利常数 $\bar{Q}$ 与动力学自由表面边界条件的拟合,以上各式中业已用 η 代替 z_0 。

表 1 五阶波波剖面计算结果

θ (度)	0	15	30	45	60	75	90	120	150	180
$\eta^{(1)}(\text{m})$	13.71	11.58	7.82	4.33	1.46	-0.80	-2.52	-4.72	-5.78	-6.09
$\eta^{(2)}(\text{m})$	13.26	11.95	8.66	4.84	1.59	-0.82	-2.63	-4.96	-6.03	-6.54

注: $H = 19.81\text{m}$; $d = 36.58\text{m}$; $T = 13.0\text{s}$ 。

$\eta^{(1)}$ 为 5 阶流函数波浪理论计算结果

$\eta^{(2)}$ 为 5 阶 Stokes 波浪理论计算结果

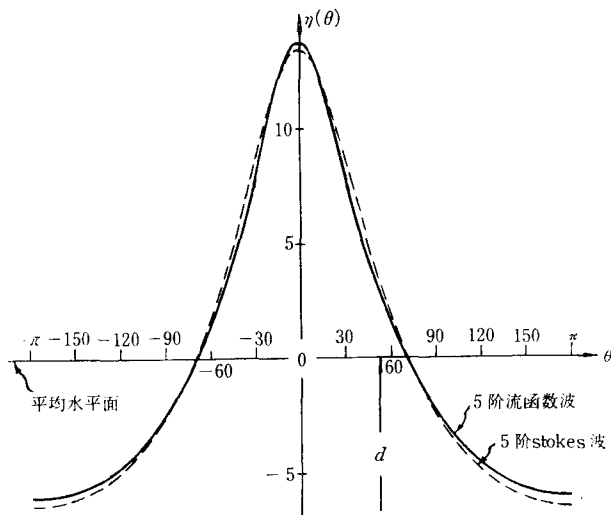


图 3 5 阶流函数波和 5 阶 Stokes 波波剖面比较

$H = 19.81\text{ m}$; $T = 13.0\text{ s}$; $d = 36.58\text{ m}$ 。

表 2 直径 $D = 1.83\text{ m}$ 垂直圆柱体上的波浪力

波高 H (m)	周期 T (s)	水深 d (m)	最大水平力 (t)			最大水平力矩 (tm)		
			(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
19.81	13.0	36.58	160.8	164.8	169.8	5569.7	5578.8	5917.3

注: (1) 为 5 阶流函数波浪理论计算结果;

(2) 为 5 阶 Stokes 波浪理论计算结果;

(3) 为 Dean 用流函数波浪理论图表计算结果。

以上计算均取 $C_D = 1.05$, $C_M = 1.40$ 。

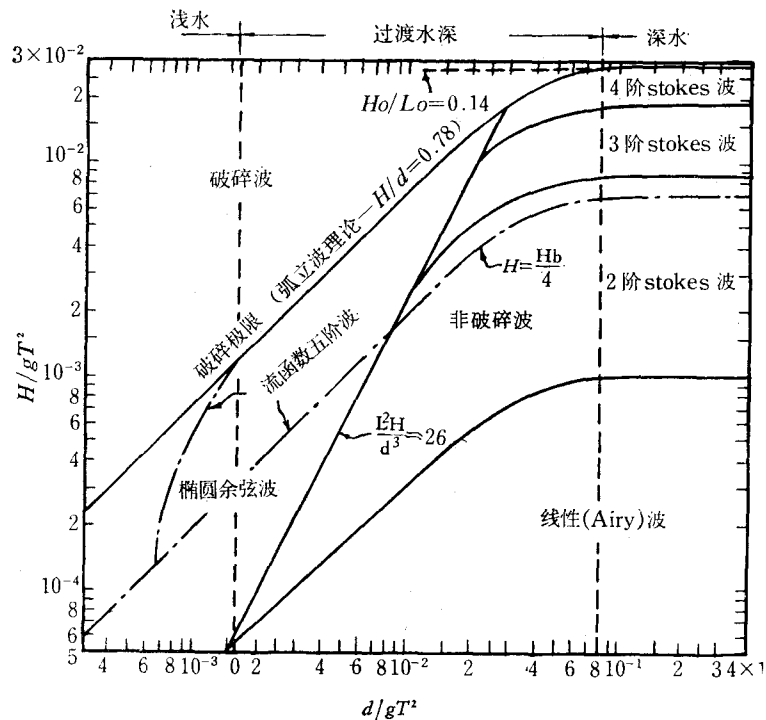


图4 各种波浪理论适用范围

为了检验上述求解方法和计算机程序的可靠性, 利用五阶流函数波浪理论和五阶斯托克斯波浪理论^[6]计算了两组波浪参数的波剖面, 并对其中一组计算了直径为 1.83m 的垂直圆柱体上的波浪力。波剖面的计算结果列于表 1, 且绘于图 3。波浪力的计算结果列于表 2, 其中包括 Dean 本人用流函数波浪理论图表计算的结果^[4]。由图 3 可见, 两种理论计算的波剖面曲线几乎完全一致; 由表 2 可见, 两种理论计算的波浪力极为接近, 与 Dean 本人计算的结果也符合得较好。上述比较表明, 这里的求解方法是有效的, 计算机程序是可用的。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长主编, 1981. 奇异摄动理论及其在力学中的应用. 科学出版社, 161—204 页。
- [2] Dean, R. G., 1965. Stream function representation of nonlinear ocean waves. *Journal of Geophysical Research* **70**(18): 4561—4572.
- [3] ———, 1968. Relative Validity of Water Wave Theories. Proceedings, ASCE Speciality Conference on Civil Engineering in the Oceans. San Francisco. PP. 1—30.
- [4] ———, 1976. Deterministic Computation of Wave Forces on Small Members. Chapter 3, Part I(IV): Wave force calculation aids and design examples. PP. 3-1-54—3-1-65.
- [5] ———, 1974. Evaluation and Development of Water Wave Theories for Engineering Application. Volume I, Chapter III: Evaluation of validities of wave theories, Special, rept. No. 1. U. S. Army Corps of Engineerings, Coastal Engineering Research Center. PP. 6—38.
- [6] Skjelbreia, L. and J. A. Hendrickson, 1961. Fifth order gravity wave theory, Proceedings Seventh Conference on Coastal Engineering. **10**: 184—196.
- [7] United States Army Coastal Engineering Research Center, 1973. Shore Protection Manual. Volume II, Chapter 7 (7.31): Forces on piles, PP. 7-64—7-127.

- [8] Dean, R. G., 1970. Wave forces: Data analysis and engineering calculation method. *Journal of Petroleum Technology* 22(3): 368—375.

A SOLUTION FOR STREAM FUNCTION REPRESENTATION OF NONLINEAR OCEAN WAVES

Liu Shugong Li Yanbin and Han Jiefen

(The Design and Research Institute of Bohai Oil Company of CNOOC)

ABSTRACT

This paper presents a solution of the stream function representation for nonlinear ocean waves with CYBER 170/720 computer. The character is: there isn't the item of $C^2/2g$ in the dynamic free surface boundary condition, so Q , the meanvalue of Bernoulli constant in a wave period, is limited to a small range and selected easily. The initial values of parameters L , Ψ_η and $X(n)$ in the solution are obtained in view of physical concept, so the divergence in calculation, which may occur due to improper initial values of these parameters, can be avoided. The $\bar{Q}$ is referred to as a variable which varies with the wave height in iteration, not spreaded out perturbally as Q .