

Leendertse 浅水模式的数值稳定性

雷光耀

(中国科学院应用数学研究所)

本文应用关于多项式根的 Routh-Hurwitz 定理,证明了 Leendertse 浅水模式在忽略对流项的影响时,稳定性条件为 $\zeta + h > 0$ 和 $\Delta t f < 2$,并证明了 Leendertse 关于摩擦项用显式处理时格式完全不稳定的结论是错误的,给出了这种情形下的稳定性条件为 $0 < b < 1$ 。文中还应用误差分析的方法,得到了该模式追赶法计算的稳定性条件。

一、关于 Leendertse 模式的稳定性条件

Leendertse 在 1967 年给出了长周期水波传播的计算模式^[6],并在无对流项和摩擦项时得出稳定性的必要条件为 $\Delta t f < 2$;在无对流项和柯氏力时,计算模式为无条件稳定(应该指出的是,该文忽视了稳定性条件 $R > 0$ 即 $\zeta + h > 0$)。近年来,该模式已为国内外很多文献所采用^[4-5],但尚未对该模式的数值稳定性加以讨论和研究,因而普遍采用了 Courant 条件作为近似的稳定性条件。但该条件是以简单波动方程的显式稳定性条件为依据的,因而不能描述交替方向隐式法的稳定性。通常它对时间步长的要求过于苛刻,因而不适用的。

Leendertse 模式采用的基本微分方程组为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(\zeta + h)v] = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + gu \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\zeta + h)c^2} = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + gv \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\zeta + h)c^2} = 0. & (3) \end{cases}$$

利用正方形交错网格将其离散化,按交替方向隐式法分别在 X, Y 方向由追赶法递推求解(详细计算公式见文献 [6])。为简便起见,与文献 [6] 相同,在此忽略对流项的影响并对 (1) 作线性简化,则原方程组化为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + gu \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\zeta + h)c^2} = 0, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + gv \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\zeta + h)c^2} = 0, & (6) \end{cases}$$

应用 Fourier 变换对交替方向隐式差分格式的增长矩阵作简单计算可得

$$A \begin{pmatrix} u^{k+\frac{1}{2}} \\ v^{k+\frac{1}{2}} \\ \zeta^{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \\ \zeta^k \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$C \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \\ \zeta^{k+1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u^{k+\frac{1}{2}} \\ v^{k+\frac{1}{2}} \\ \zeta^{k+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ig\alpha \\ a & 1+b & 0 \\ ih\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-b & a & 0 \\ 0 & 1 & -ig\phi \\ 0 & -ih\phi & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1+b & -a & 0 \\ 0 & 1 & ig\phi \\ 0 & ih\phi & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ig\alpha \\ -a & 1-b & 0 \\ -ih\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta S} \sin \frac{k_1 \Delta S}{2},$$

$$\phi = \frac{\Delta t}{\Delta S} \sin \frac{k_2 \Delta S}{2},$$

$$a = \frac{\Delta t}{2} f \cos \frac{k_1 \Delta S}{2} \cos \frac{k_2 \Delta S}{2},$$

$$b = \frac{\Delta t}{2} g \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\zeta + h)c^2}.$$

为讨论数值稳定性,需算出增长矩阵的特征方程,并引用关于多项式根的模小于1的判别法 Routh-Hurwitz 定理^[7]。对方程组(7)–(8)计算可得其特征方程 $|A^{-1}B - D^{-1}C\lambda| = 0$ 为:

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0. \quad (9)$$

其中

$$A_1 = \frac{4a^2 + (1-b)^2(1+gh\alpha^2)(1+gh\phi^2) - 4(1-bgh\alpha^2)(1-bgh\phi^2)}{(1+b)^2(1+gh\alpha^2)(1+gh\phi^2)}, \quad (10)$$

$$A_2 = \frac{-4a^2 - (1+b)^2(1+gh\alpha^2)(1+gh\phi^2) + 4(1+bgh\alpha^2)(1+bgh\phi^2)}{(1+b)^2(1+gh\alpha^2)(1+gh\phi^2)}, \quad (11)$$

$$A_3 = -\frac{(1-b)^2}{(1+b)^2}. \quad (12)$$

为简便起见,令 $x = gh\alpha^2$; $y = gh\phi^2$; $z = \frac{8}{(1+b)^2(1+x)(1+y)}$, 则有

$$1 - A_1 + A_2 - A_3 = z(b^2xy + 1 - a^2), \quad (13)$$

$$1 + A_1 + A_2 + A_3 = z(bx + by), \quad (14)$$

$$3 - A_1 - A_2 + 3A_3 = z(2b + bx + by + 2bxy), \quad (15)$$

$$1 - A_2 + A_3(A_1 - A_3) = \frac{zb}{(1+b)^2} [2a^2 + 2b^2 + (1+b^2)(x+y) + 2xy]. \quad (16)$$

由(12)可知, $|\lambda| < 1$ 的必要条件为 $b > 0$ 。在 $a^2 < 1$ 和 $b > 0$ 的条件下, (13)–(16) 全取正值, 从而由 Routh-Hurwitz 定理可知 $|\lambda_i| < 1$, 即差分格式是稳定的。 $b > 0$ 和 $a^2 < 1$ 分别是:

$$\zeta + h > 0, \quad (17)$$

$$f\Delta t < 2. \quad (18)$$

由(17), (18)可知, 只要水深值大于水位振幅, 并且在半个时间步长内, 地球旋转造成的速度增量不超过原有的速度分量, 差分格式就是稳定的。从(17)式看出, 计算模式只是在海区有水的情形下为正确的。在“无水”即 $\zeta + h < 0$ 的情形下, 由(1)式可知质量流与流速的方向相反, 故水的流失导致水位的增加, 水的流入使水位减小。又由(2)和(3)可知摩擦力使速度值增长。这就造成计算结果的无限增长。值得注意的是, 条件(17)并不是对时间步长的限制, 而是对水深值的限制。这个要求很容易被忽略, 当水位振幅超过水深时, 采用任何时间步长都是不稳定的, 必须调整水深值才能得到稳定结果。

在无柯氏力的情形下(18)式成立, 故稳定性条件为(17)式。文献[6]忽视了这个条件, 认为这时差分格式无条件稳定, 这是不确切的。由(13)–(16)可知, 当 $b \rightarrow 0$ 时, 只要 $a^2 < 1$, 格式仍保持稳定。从而可知无摩擦项时的稳定性条件为(18)。令 $a = 0$, $b \rightarrow 0$, 则可知既无摩擦项又无柯氏力时, 差分格式无条件稳定。

二、关于 Leendertse 对摩擦项差分处理的结论

文献[6]对摩擦项的差分处理作了数值试验。结果发现在用显式处理时, 只经过几个时间步长就发生溢出现象; 在用半显式处理时, 计算结果就出现轻微跳动。从而 Leendertse 认为, 若摩擦项用显式处理, 则差分格式完全不稳定。实际上, 由于摩擦力是抑制速度增长的因素, 在用显式处理时也可以稳定, 但问题在于稳定性条件。所以, Leendertse 的这一结论是不正确的。

我们采用与文献[6]相同的方法来处理摩擦项, 即对 $g\omega^* \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\zeta + h)c^2}$ 中的 ω^* [在(5)中 $\omega^* = u$, 在(6)中 $\omega^* = v$] 取前半个时间步长的已知值, 并忽略对流项和柯氏力, 则(7), (8)中的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ig\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ ih\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - b & 0 & 0 \\ 0 & 1 - b & -ig\phi \\ 0 & -ih\phi & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ig\phi \\ 0 & ih\phi & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1-b & 0 & -iga \\ 0 & 1-b & 0 \\ -iha & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

令 $x = gha^2$, $y = gh\phi^2$, 这时特征方程 $|A^{-1}B - C^{-1}D\lambda| = 0$ 的三个系数可简记为:

$$A_1 = -\frac{(1-b)(1+x)(1-b-y) + (1-x)(1-y) + (1-b)(1-b-x)(1+y)}{(1+x)(1+y)}, \quad (19)$$

$$A_2 = \frac{(1-b)^2(1-b-x)(1-b-y) + (1-b)(1-x)(1-b+y) + (1-b)(1-b+x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}, \quad (20)$$

$$A_3 = -\frac{(1-b)^2(1-b+x)(1-b+y)}{(1+x)(1+y)}。 \quad (21)$$

设 $t = 1 - b$; $w = \frac{1}{(1+x)(1+y)}$, 则经过计算化简后可得:

$$1 - A_1 + A_2 - A_3 = 2w[(1+t^2)^2 + (1-t)^2xy], \quad (22)$$

$$1 + A_1 + A_2 + A_3 = 2w(1+t)(1-t^2)(x+y), \quad (23)$$

$$3 - A_1 - A_2 + 3A_3 = 2w[2(1-t^4) + (1-t)(1+t^2)(x+y) + 2(1-t^2)xy], \quad (24)$$

$$1 - A_2 + A_3(A_1 - A_3) = w^2[P_0 + P_1(x+y) + P_2xy + P_3(x^2 + y^2) + P_4(x^2y + xy^2) + P_5x^2y^2]。 \quad (25)$$

其中:

$$P_0 = (1-t^4)(1-t^2)^2, \quad (26)$$

$$P_1 = (1-t^4)(1+t)(2-3t+2t^2), \quad (27)$$

$$P_2 = 4(1-t^6), \quad (28)$$

$$P_3 = (1-t)(1+t^2)(1+t^3), \quad (29)$$

$$P_4 = 2(1-t^5) + (1-t)(t+t^3), \quad (30)$$

$$P_5 = (1-t^2)(1+t)^2。 \quad (31)$$

由于方程 $2 - 3t + 2t^2 = 0$ 无实根, 从而在 $0 < t < 1$ 时, (22)~(31) 全取正值, 故特征值的模小于 1, 差分格式是稳定的。于是在这种情形下的稳定性条件则为:

$$0 < b < 1 \quad (32)$$

实际为:

$$\zeta + h > 0, \quad (33)$$

$$\frac{\Delta t}{2} g \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\zeta + h)c^2} < 1。 \quad (34)$$

条件 (33) 已在第一部分作了说明。条件 (34) 则要求对时间步长加以限制, 以保证摩擦力只能减弱原有的运动, 但不能改变原有的运动方向。这个要求在显式处理的情形下是合理的。若将摩擦项中的 w^* 采用对时间平均的半隐式形式, 则其显式部分仍然要求对时间步长加以同样的限制, 但比 (34) 的要求放宽一倍, 稳定性有所改善。

文献 [6] 中有关的数值试验采用的是 Haringvliet 模型, $\Delta t = 720s$, $\Delta S = 400m$, 最

小水深为 0.9m, 最大流速约为 1m/s, Chezy 系数约为 $50\text{m}^{1/2}/\text{s}$, $b < 1$ 的条件可能不满足。另外, 文献 [6] 在计算中采用的初始水位为 -0.7m, 计算开始时水位仍在下降, 因而在浅水区也有可能出现 $\zeta + h < 0$ 的现象, 故 $b > 0$ 的条件也可能不满足。

我们在 Leendertse 模式中对摩擦项采用显式处理, 对于 ΔS 为 5 km 的渤海模型进行了数值试验, 当 $\Delta t = 4500\text{s}$ 时结果仍是稳定的。由于结果输出的要求, 已不能采用更大的时间步长。从实用上看, 如果这种处理能得到比隐式处理更接近于实测值的数值模拟结果, 也还是可以采用的。

三、Leendertse 模式在追赶法计算中的稳定性条件

以上讨论了 Leendertse 模式在时间方面的稳定性条件。由于该模式要用追赶法分别在 x 和 y 方向递推求解, 因而在空间方面的递推过程中还有追赶法的稳定性条件。即在前一时刻的结果已正常算出的条件下, 尚须对时间步长加以一定限制, 以保证追赶法计算中当递推次数增多即 ΔS 减小时误差不会无限增长。为简便起见, 我们只讨论 x 方向追赶法的稳定性条件。其计算公式可简记为:

$$P_i = \frac{lH_{i+\frac{1}{2}}}{1 + lH_{i-\frac{1}{2}}R_{i-1}}, \quad (35)$$

$$Q_i = \frac{lH_{i-\frac{1}{2}}S_{i-1} + \tilde{Q}_i}{1 + lH_{i-\frac{1}{2}}R_{i-1}}, \quad (36)$$

$$R_i = \frac{lg}{1 + \frac{l}{2}\delta u_{i+\frac{1}{2}} + lgP_i}, \quad (37)$$

$$S_i = \frac{lgQ_i + \tilde{S}_i}{1 + \frac{l}{2}\delta u_{i+\frac{1}{2}} + lgP_i}, \quad (i = i_1, i_1 + 1, \dots, i_2), \quad (38)$$

$$\begin{cases} \zeta_i = -P_i u_{i+\frac{1}{2}} + Q_i, \\ u_{i-\frac{1}{2}} = -R_{i-1}\zeta_i + S_{i-1}, \quad (i = i_2, i_2 - 1, \dots, i_1). \end{cases} \quad (39)$$

$$u_{i-\frac{1}{2}} = -R_{i-1}\zeta_i + S_{i-1}, \quad (i = i_2, i_2 - 1, \dots, i_1). \quad (40)$$

其中:

$$l = \frac{\Delta t}{2\Delta S},$$

$$H_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\zeta_{i+1} + \zeta_i) + h_{i+\frac{1}{2}}.$$

δ 为中心差分记号; \tilde{Q}_i 和 \tilde{S}_i 是与递推过程无关的已知有界值。(35)–(38) 称为“追”过程, 按 i 递增的次序进行。(39)–(40) 为“赶”过程, 按 i 递减的次序进行。由开边界或闭边界条件可知, “追”过程开始时有 $R_{i-1} = 0$, $S_{i-1} = 0$, “赶”过程开始时 $u_{i_2+\frac{1}{2}}$ 或 ζ_{i_2} 为已知。

先讨论“赶”过程的稳定性条件。由(39)、(40)可知, $u_{i+\frac{1}{2}}$ 的误差进入 ζ_i 时增长 P_i 倍, ζ_i 的误差进入 $u_{i-\frac{1}{2}}$ 时增长 R_{i-1} 倍。在 u 和 ζ 交替计算的过程中, 若要使误差不无限增长, 可以给出两个条件, 即 P_i , Q_i , R_i , S_i 对所有 i 是有界的, 并且 $|P_i R_i|$ 对所有 i 都小于 1。因此当

$$\zeta + h \geq c_1 > 0 \quad (41)$$

$$1 + \frac{l}{2} \delta u \geq c_2 > 0 \quad (42)$$

同时成立时, P_i 和 R_i 为有界正数, Q_i 和 S_i 有界, 且 $0 < P_i R_i < 1$ 。从而可知(41)与(42)为“赶”过程的稳定性条件。

实际上, 由边界条件 $R_{i-1} = 0$ 和(35)、(41)可知 P_{i_1} 为正, 又由(37)、(42)可知 R_{i_1} 为正。由 P_{i_1} 与 R_{i_1} 为正可知 P_{i_1+1} 与 R_{i_1+1} 为正, …… , 故所有 P_i 和 R_i 为正。对于 P_i 和 R_i 可得:

$$\frac{lH_{\min}}{1 + lH_{\max} \frac{lg}{c_2}} < P_i < lH_{\max}, \quad (43)$$

$$0 < R_i < \frac{lg_0}{c_2} \quad (44)$$

设

$$|\tilde{Q}_i| < c_3,$$

$$|\tilde{S}_i| < c_4,$$

$$c_5 = \frac{c_2}{lg lH_{\max}},$$

$$c_6 = \frac{c_3}{(1 + c_5)lH_{\min}} + \frac{c_4}{c_2},$$

$$c_7 = \frac{c_6 H_{\max}(1 + c_5)}{H_{\min} c_5},$$

则由 c_5 定义可知:

$$\left| \frac{lg Q_i}{c_2 + lg P_i} \right| < \frac{|Q_i|}{\left(1 + \frac{c_2}{lg lH_{\max}}\right) P_i} = \frac{|Q_i|}{(1 + c_5) P_i},$$

于是可得如下的估计:

$$\begin{aligned} |S_i| &< \frac{|lg Q_i|}{c_2 + lg P_i} + \left| \frac{\tilde{S}_i}{c_2} \right| \\ &< \frac{|Q_i|}{(1 + c_5) P_i} + \left| \frac{\tilde{S}_i}{c_2} \right| \\ &\leq \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{(1 + c_5) H_{i+\frac{1}{2}}} |S_{i-1}| + \left[\frac{|\tilde{Q}_i|}{(1 + c_5) lH_{\min}} + \frac{|\tilde{S}_i|}{c_2} \right] \\ &< \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{(1 + c_5) H_{i+\frac{1}{2}}} |S_{i-1}| + c_6 \\ &< \frac{H_{i-\frac{3}{2}}}{(1 + c_5)^2 H_{i+\frac{1}{2}}} |S_{i-2}| + \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{(1 + c_5) H_{i+\frac{1}{2}}} c_6 + c_6 \\ &< \dots \\ &< \frac{c_6 H_{\max}(1 + c_5)}{H_{\min} c_5}, \end{aligned}$$

于是有估计式:

$$|S_i| < c_7, \tag{45}$$

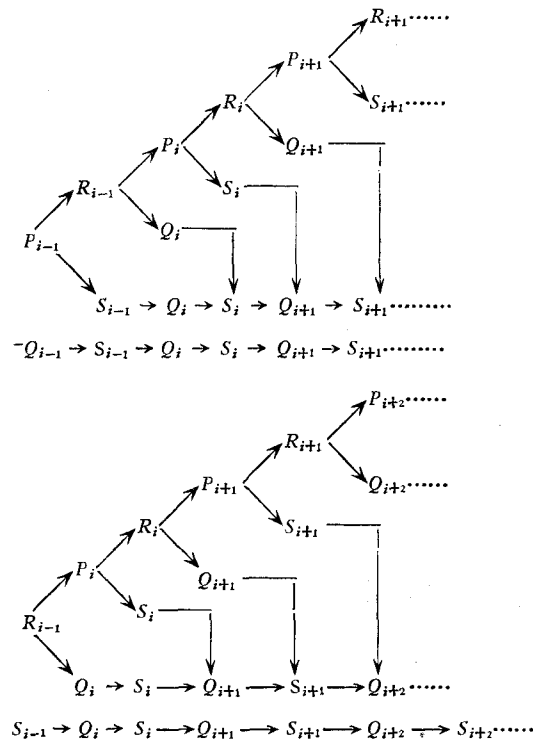
$$|Q_i| < lH_{\max}c_7 + c_{30} \tag{46}$$

故 P_i, Q_i, R_i, S_i 是有界的。又由 (37) 可得:

$$P_i R_i = \frac{\lg P_i}{1 + \frac{l}{2} \delta u_{i+\frac{1}{2}} + \lg P_i} \leq \frac{\lg P_i}{c_2 + \lg P_i} < 1. \tag{47}$$

由 (43)–(47) 可知, (41)、(42) 就是“赶”过程的稳定性条件。下面可以看到 (41) 和 (42) 也是“追”过程的稳定性条件。

由 (35)–(38) 可知, 在“追”过程中, 误差的传播有 6 种途径, 即 $R_{i-1} \rightarrow P_i, R_{i-1} \rightarrow Q_i, S_{i-1} \rightarrow Q_i, P_i \rightarrow R_i, P_i \rightarrow S_i, Q_i \rightarrow S_i$ 。在某一步 $P_{i-1}, R_{i-1}, Q_{i-1}, S_{i-1}$ 的计算误差进入计算过程后, 误差传播的所有途径如下所示:



分析这些误差传播途径的特点可知, 在“追”过程中只需讨论两个问题。首先, 在前述 6 种单步的误差传播过程中, 误差的一次性增长对所有 i 是有界的; 其次, 多步的误差传播过程 $RPRP \cdots RP$ 和 $SQSQ \cdots SQ$ 不使误差无限增长。关于单步传播, 需估计其相应的误差增长因子。为此只需从形式上对 P_i, Q_i, R_i, S_i 计算有关的偏导数。上述 6 种单步传播的误差增长因子分别为:

$$\frac{\partial P_i}{\partial R_{i-1}} = -(P_i)^2 \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{H_{i+\frac{1}{2}}}, \tag{48}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial R_{i-1}} = -Q_i P_i \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{H_{i+\frac{1}{2}}}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial S_{i-1}} = P_i \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{H_{i+\frac{1}{2}}}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial P_i} = -(R_i)^2, \quad (51)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial P_i} = -S_i R_i, \quad (52)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial Q_i} = R_i. \quad (53)$$

引用这些结果可知,多步的误差传播过程 $R_{i-1}P_i R_i P_{i+1} \cdots R_{i_0-1}P_{i_0}$ 的误差增长因子为:

$$\begin{aligned} A_{RP} &= \left[-(P_i)^2 \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{H_{i+\frac{1}{2}}} (-R_i^2) \right] \left[-(P_{i+1})^2 \frac{H_{i+\frac{1}{2}}}{H_{i+\frac{3}{2}}} (-R_{i+1}^2) \right] \\ &\quad \cdots \left[-(P_{i_0})^2 \frac{H_{i_0-\frac{1}{2}}}{H_{i_0+\frac{1}{2}}} (-R_{i_0}^2) \right] \\ &= (R_i P_i)^2 (R_{i+1} P_{i+1})^2 \cdots (R_{i_0} P_{i_0})^2 \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{H_{i_0+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (54)$$

另一多步的误差传播过程 $S_{i-1}Q_i S_i Q_{i+1} \cdots S_{i_0-1}Q_{i_0}$ 的误差增长因子为:

$$\begin{aligned} A_{SQ} &= \left(P_i \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{H_{i+\frac{1}{2}}} R_i \right) \left(P_{i+1} \frac{H_{i+\frac{1}{2}}}{H_{i+\frac{3}{2}}} R_{i+1} \right) \cdots \left(P_{i_0} \frac{H_{i_0-\frac{1}{2}}}{H_{i_0+\frac{1}{2}}} R_{i_0} \right) \\ &= (P_i R_i) (P_{i+1} R_{i+1}) \cdots (P_{i_0} R_{i_0}) \frac{H_{i-\frac{1}{2}}}{H_{i_0+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (55)$$

当条件 (41) 和 (42) 成立时,由于 P_i, Q_i, R_i, S_i 为有界值且 $0 < P_i R_i < 1$, 故有:

$$0 < A_{RP} < \frac{H_{\max}}{H_{\min}}, \quad (56)$$

$$0 < A_{SQ} < \frac{H_{\max}}{H_{\min}}. \quad (57)$$

于是在“追”的过程中,误差不会无限增长,计算过程是稳定的。在实际计算中,(54)和(55)的右端有很多小于1的因子连乘,因而误差增长因子要比极端情形下的估计(56)和(57)小得多。

综上所述,不论“追”或“赶”过程,稳定性条件都是(41)和(42)。(41)即海区有水的条件,前面已经讨论过了。条件(42)也就是:

$$2c_2 \Delta S + \frac{\Delta t}{2} u_{i-\frac{1}{2}}^k \leq 2\Delta S + \frac{\Delta t}{2} u_{i+\frac{3}{2}}^k,$$

或

$$2c_2 \Delta S + \left(x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} u_{i-\frac{1}{2}}^k \right) \leq x_{i+\frac{3}{2}} + \frac{\Delta t}{2} u_{i+\frac{3}{2}}^k. \quad (58)$$

上式右端为位于 $x_{i+\frac{3}{2}}$ 处的水质点经过 $\frac{\Delta t}{2}$ 后的位置,上式左端括号内为 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 处的水质点

经过 $\frac{\Delta t}{2}$ 后的位置。在 x 方向的追赶法计算中, 稳定性条件要求保持水质点在 x 方向的有序性, 这种要求是自然而合理的。

用同样方法可得出在 y 方向追赶法计算的稳定性条件为:

$$\zeta + h \geq c_1 > 0, \quad (41)$$

$$1 + \frac{l}{2} \delta v \geq c_8 > 0. \quad (59)$$

条件 (59) 要求保持水质点在 y 方向的有序性。

(42) 和 (59) 是对流项的线性化处理而得出的。在无对流项时, Leendertse 模式的追赶法计算只要水深值合理就是稳定的。

参 考 文 献

- [1] 王化桐、方欣华、匡国瑞、杨殿荣、陈时俊, 1980。胶州湾环流和污染扩散的数值模拟(一)。山东海洋学院学报 **10**(1): 26—63。
- [2] 王钟禧、刘占沛、山广林、徐洪达、雷光耀, 1981。渤海潮波数值模拟中几个参数的数值试验。海洋研究 **19**: 1—11。
- [3] 金子安雄、堀江毅、村上和男, 1975。应用 ADI 法的潮流和污染扩散的数值计算——适用于大阪湾的情形。港湾技术研究所报告(日文) **14**(1): 3—65。
- [4] 赵士清、张镜潮, 1981。连云港潮流的数值模拟。海洋学报 **3**(3): 500—515。
- [5] 窦振兴、罗远论, 1982。渤海潮流污染扩散的数值模拟。海洋学报 **4**(6): 667—678。
- [6] Leendertse, J. J., 1967. Aspects of a Computational Model for Long-Period Water-Wave Propagation. Memorandum, RM-5294-PR, The Rand Corporation. pp. 52—160.
- [7] Gantmacher, F. R., 1959. The Theory of Matrices. Chelsea Publishing Company. **2**:194—195.

ON THE NUMERICAL STABILITY OF LEENDERTSE'S SHALLOW-WATER MODEL

Lei Guangyao

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

Using criterion of Routh-Hurwitz about polynomial roots, the stability conditions of Leendertse's shallow-water model were given while neglecting the effects of the convective terms. These conditions were $\xi+h>0$ and $\Delta t f < 2$. Leendertse pointed out that the difference scheme was completely unstable while explicit treatment of resistance terms was taken. This paper shows that Leendertse's conclusion is an erroneous one. In this case the stability condition $0 < b < 1$ is given. Moreover, using the method of error analysis, it has been proved that the stability conditions for the computation of double-sweep method of Leendertse's model are $\zeta+h \geq C_1 > 0$, $1 + \frac{1}{2} \delta u \geq C_2 > 0$ and $1 + \frac{1}{2} \delta v \geq C_8 > 0$.