

长江口潮流的一种数值模式

赵士清

(南京水利科学研究院)

提 要

为了解二维潮流方程(在水深上求平均),本文给出了一种一般化了的有限差分格式。应用这个方法模拟了长江口的潮流,计算结果与现场观测资料相当一致。

平面区域是由锐角三角形元素所组成。在节点上,一阶和二阶偏导数已被定义。在潮流基本方程中,水平涡动粘滞项也已考虑。

这个方法有一个很大的优点,能灵活地模拟图形,即边界更精确和在感兴趣的区域能被任意分割。而且,这个方法是经济的。

长江口属分汊河口,崇明岛把河口分隔为南北两支。南支在吴淞口以下由长兴岛分隔为南港和北港。南港在九段以下由九段沙分隔为南槽和北槽。

长江径流量大,潮流亦强。由于径流和潮流这两种动力因素相互消长,造成滩槽冲淤多变,影响了入海航道。

长江口区流场受径流、潮流、地形及风浪等因素的影响,情况很复杂。过去对其研究都是根据实测资料仅局限于几个零星点进行分析,其结果难免带局限性。本文试图用数学模型对长江口区潮流场进行整体研究。

本文所使用的数值模式具有以下的一些特点:(1)在平面三角形网格节点上建立起函数的一阶及二阶偏导数的表达式,将局部有限元法和有限差分法结合起来,从而节约了计算时间和存储量;(2)基本方程中包含常为人们所省略的二阶涡动粘滞项,使基本方程的物理意义更为明确;(3)本模式是一种显式格式,但不需要人们在有限元法中常常采用的“光滑化”措施,使其解更符合真实情况;(4)由于本模式是一种显式格式,所以处理动边界问题非常方便。

通过数学模型在长江口区1974年8月一次洪季大潮复演的基础之上,对长江口区潮流特性作了初步分析。

一、基本方程和定解条件

文中采用笛卡儿直角坐标系。 x 和 y 轴位于平均水平面上; z 轴垂直向上(图1)。

二维潮流的基本方程是:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(\zeta + h)v] = 0, \quad (1)$$

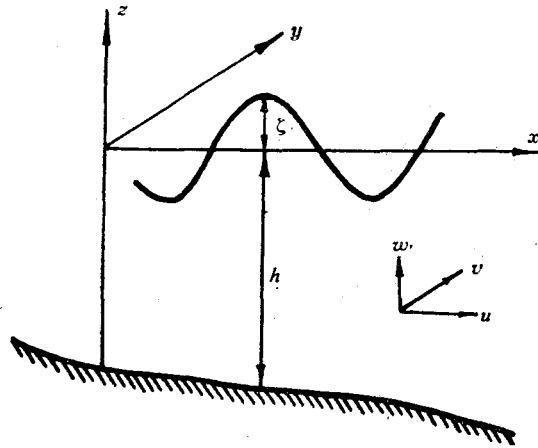


图 1 坐标系的定义

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{guQ}{c^2(\zeta + h)} = \lambda \Delta u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{gvQ}{c^2(\zeta + h)} = \lambda \Delta v, \quad (3)$$

其中

ζ (水位)——水面到平均水平面的距离; h (水深)——床面到平均水平面的距离; u, v ——分别为 x 方向和 y 方向上的垂线平均流速分量; Q (速度) = $\sqrt{u^2 + v^2}$; c ——谢才系数; g ——重力加速度 (9.8m/s^2); f ——柯氏系数; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; λ ——涡动粘滞系数。

方程(1)是从流体质量守恒推导出来的,没有外界入流;方程(2),(3)是从动量守恒推导出来的,其基于以下一些假设:(1)忽略了垂直加速度;(2)水流具有不可压缩性;(3)水流是常密度并服从静水压力分布;(4)床面的剪切力可表示如下的二次形式 $\tau_x = -guQ/c^2$; $\tau_y = -gvQ/c^2$ 。

在陆地闭边界上,取法向流速为零,即 $v_n = 0$; 在与其它水域相通的开边界上,用水位或流速来控制。

初始时刻的水位及流速可认为是零,即

$$\zeta(x, y, 0) = u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0。$$

二、偏导数的表示式^[1]

设将一平面区域剖分为有限个三角形单元的集合体。在每一个三角形单元 e 内 (图 2),任一函数 $f(x, y)$ 可用线性函数来近似(采用三节点三角形单元):

$$f(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e} [(a_i + b_i x + c_i y)f_i + (a_j + b_j x + c_j y)f_j]$$

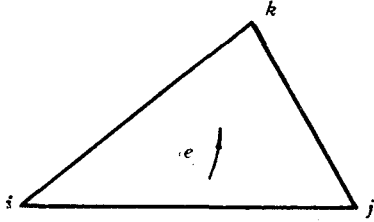


图 2 三角形单元

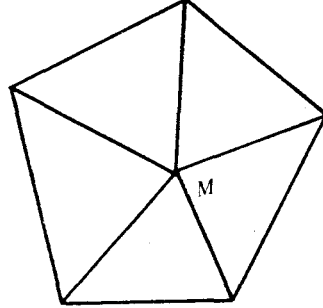


图 3 M点为内点的情形

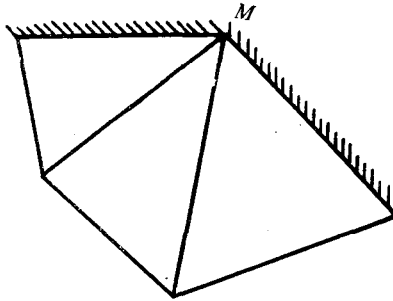


图 4 M点为边界点的情形

$$+ (a_k + b_k x + c_k y) f_k], \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j; \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k; \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i; \end{aligned}$$

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (\text{三角形单元 } e \text{ 的面积}).$$

在三角形单元 e 内

$$f_x = \frac{1}{2\Delta_e} (b_i f_i + b_j f_j + b_k f_k), \quad (5)$$

$$f_y = \frac{1}{2\Delta_e} (c_i f_i + c_j f_j + c_k f_k). \quad (6)$$

在以节点 M 为顶点的所有三角形单元上 (图 3, 4), 对 f_x 进行积分:

$$\begin{aligned} \iint_A f_x dA &= f_x(M) A, \\ \iint_A f_x dA &= \sum_e \iint_e \frac{1}{2\Delta_e} (b_i f_i + b_j f_j + b_k f_k) dA \\ &= \frac{1}{2} \sum_e (b_i f_i + b_j f_j + b_k f_k), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f_x(M) &= \frac{1}{2A} \sum_e (b_i f_i + b_j f_j + b_k f_k) \\ &= \frac{1}{2A} \sum_e \sum_{r=i,j,k} b_r f_r \end{aligned} \quad (7)$$

同理

$$\begin{aligned} f_y(M) &= \frac{1}{2A} \sum_e (c_i f_i + c_j f_j + c_k f_k) \\ &= \frac{1}{2A} \sum_e \sum_{r=i,j,k} c_r f_r \end{aligned} \quad (8)$$

其中

\sum_e 表示在以节点 M 为顶点的所有三角形单元上求和; $A = \sum_e \Delta_e$

借助格林公式来建立平面三角形网格内部节点上函数二阶偏导数的表示式。

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dA &= \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} A, \\ \iint_A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dA &= \oint_L f_x dy = - \sum_e \frac{1}{2\Delta_e} \left(\sum_{r=i,j,k} b_r f_r \right) b_i, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} = - \frac{1}{2A} \sum_e \frac{1}{\Delta_e} \left(\sum_{r=i,j,k} b_r f_r \right) b_i \quad (9)$$

同理

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} = - \frac{1}{2A} \sum_e \frac{1}{\Delta_e} \left(\sum_{r=i,j,k} c_r f_r \right) c_i \quad (10)$$

其中, 节点 i 即为节点 M ; \oint_L 为在区域 A 的边界上进行线积分。

式(7), (8)为函数一阶偏导数的表示式; 式(9), (10)为函数二阶偏导数的表示式。

联合式(9), (10)得:

$$\Delta f_i = - \frac{1}{2A} \sum_e \frac{1}{\Delta_e} \left(b_i \sum_{r=i,j,k} b_r f_r + c_i \sum_{r=i,j,k} c_r f_r \right) \quad (11)$$

三、差分表达式

在节点 i 处展开, 对方程(1)–(3)采用下列差分格式:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h)u] \right)_i^n + \left(\frac{\partial}{\partial y} [(\zeta + h)v] \right)_i^n = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^{n+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + v_i^n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i^n + g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^{n+1} - f v_i^n \\ + \frac{g u_i^{n+1} Q_i^n}{c_i^2 (\zeta + h)_i^{n+1}} = \lambda (\Delta u)_i^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + u_i^n \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^n + v_i^{n+1} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_i^n + g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_i^{n+1} + f u_i^n$$

$$+ \frac{g v_i^{n+1} Q_i^n}{c_i^2 (\zeta + h)_i^{n+1}} = \lambda (\Delta v)_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

其中

c_i ——以节点 i 为顶点的三角形单元上的平均谢才系数; Δt ——时间步长。

式(12)–(14)中, () 内关于 x 与 y 的一阶偏导数具有式(7)、(8)的形式。

$$(\Delta f)_i^{n+\frac{1}{2}} = \alpha(f_i^n) - \beta f_i^{n+1};$$

$$\beta = \frac{1}{4A} \sum_e (b_i^2 + c_i^2) / \Delta c;$$

$$\alpha(f_i^n) = \Delta f_i^n + \beta f_i^n.$$

将式(12)–(14)稍加整理后, 得到以下计算公式:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \Delta t \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h)u] \right)_i^n + \left(\frac{\partial}{\partial y} [(\zeta + h)v] \right)_i^n \right), \quad (15)$$

$$u_i^{n+1} = \left\{ u_i^n - \Delta t \left[v_i^n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i^n + g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_i^{n+1} - f v_i^n - \lambda \alpha(u_i^n) \right] \right\} / \left\{ 1 + \Delta t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + g \frac{Q_i^n}{c_i^2 (\zeta + h)_i^{n+1}} + \lambda \beta \right] \right\}, \quad (16)$$

$$v_i^{n+1} = \left\{ v_i^n - \Delta t \left[u_i^n \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^n + g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_i^{n+1} + f u_i^n - \lambda \alpha(v_i^n) \right] \right\} / \left\{ 1 + \Delta t \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_i^n + g \frac{Q_i^n}{c_i^2 (\zeta + h)_i^{n+1}} + \lambda \beta \right] \right\}. \quad (17)$$

计算步骤是, 首先求出计算区域中各节点的水位; 然后再求出各节点处的流速。一个时间步长接着一个时间步长反复进行计算。

四、闭边界的处理

一般, 本模型的边界不一定与坐标轴平行。下面就如何应用陆地闭边界上法向流速为零这一条件, 介绍一种解决的办法。

1. 通过式(16), (17)求出 u_i^* , v_i^* ;

2. 设 x 轴与边界节点 i 处的外法线 \mathbf{n} 夹角为 θ_i (图 5)。 x - y 坐标系与切-法向坐标系有如下关系:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ \cos \theta_i & \sin \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

所以得到切向流速分量为:

$$u_\lambda = u_i^* \sin \theta_i - v_i^* \cos \theta_i.$$

3. 再将切-法向坐标系返回到 x - y 坐标系

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_i & \cos \theta_i \\ -\cos \theta_i & \sin \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

应用法向流速 $v_n = 0$, 在 x - y 坐标系下, 重新得到边界节点 i 处的流速分量:

$$u_i^{n+1} = u_i^* \sin^2 \theta_i - v_i^* \sin \theta_i \cos \theta_i;$$

$$v_i^{n+1} = -u_i^* \sin \theta_i \cos \theta_i + v_i^* \cos^2 \theta_i.$$

在闭边界节点 i 处, 可以根据边界的走向给定 θ_i , 或根据 G. Gray^[4] 所给的一种求平均法线方向的计算公式得到。

在隅角处, 三角形网格应适当加密, 以利提高计算精度。

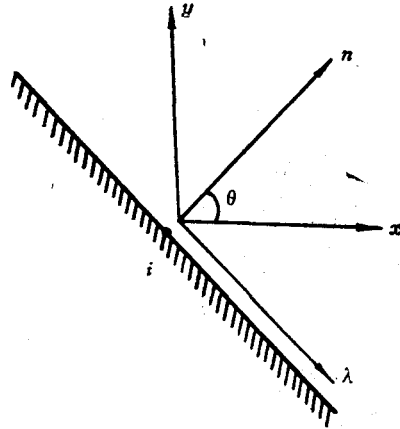


图 5 闭边界节点 i 处的两种坐标系
(图中 θ 应为 θ_i)

五、长江口潮流的计算及初步分析^[3]

长江口区, 在横沙以东, 江面宽阔, 实测同步资料很少。根据已有的资料确定计算范围, 东面以余山、鸡骨礁及绿华山一线为界; 西边以横沙岛为界 (图 6, 虚线表示 -5m 等

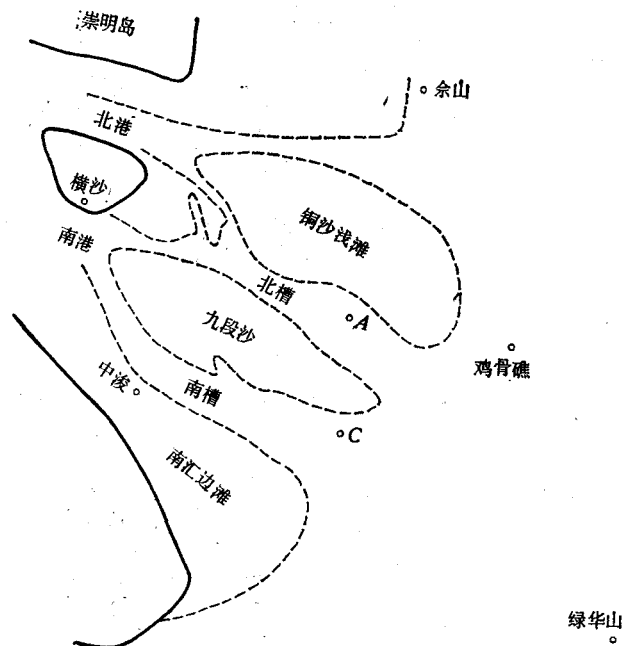


图 6 长江口区地形图

深线)。

选用1974年8月3日20点至8月4日21点的洪水大潮进行验证计算。上游大通流量为 $41620\text{m}^3/\text{s}$ ，中浚潮差 3.56m 。

时间步长 $\Delta t = 300\text{s}$; $\lambda = 15\text{m}^2/\text{s}$;

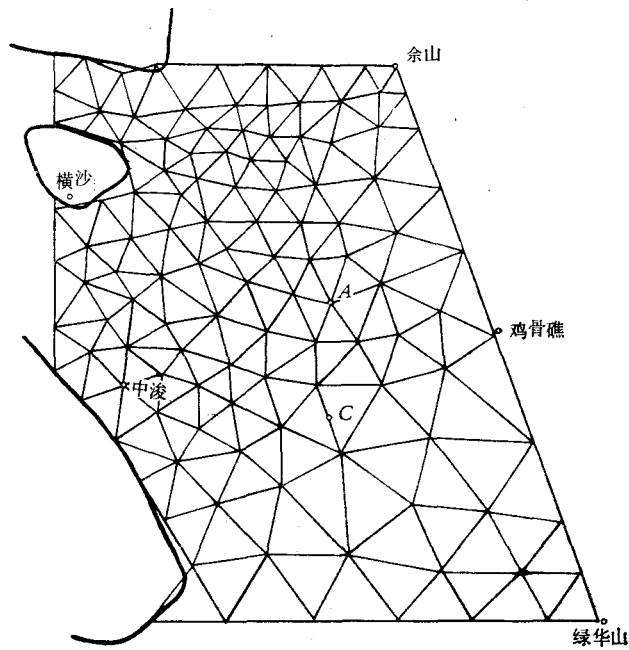


图7 长江口区三角形剖分图

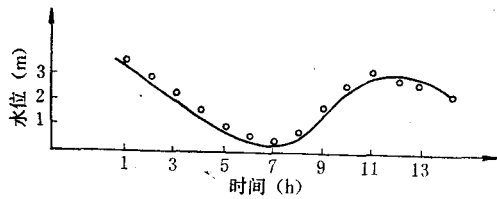


图8 中浚水位验证
—实测; ○○○○ 计算。

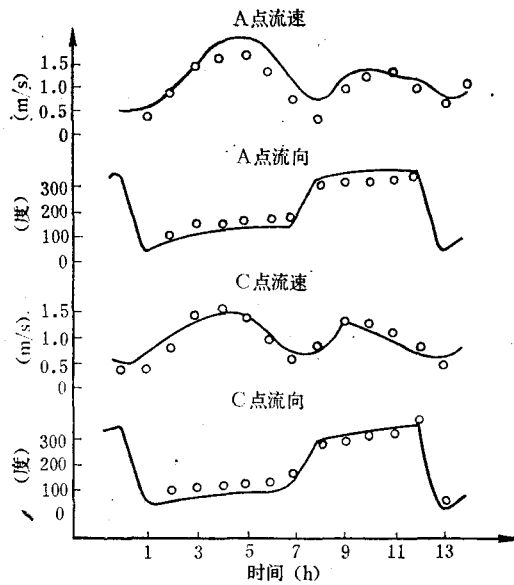


图9 流速验证
—实测; ○○○○ 计算。

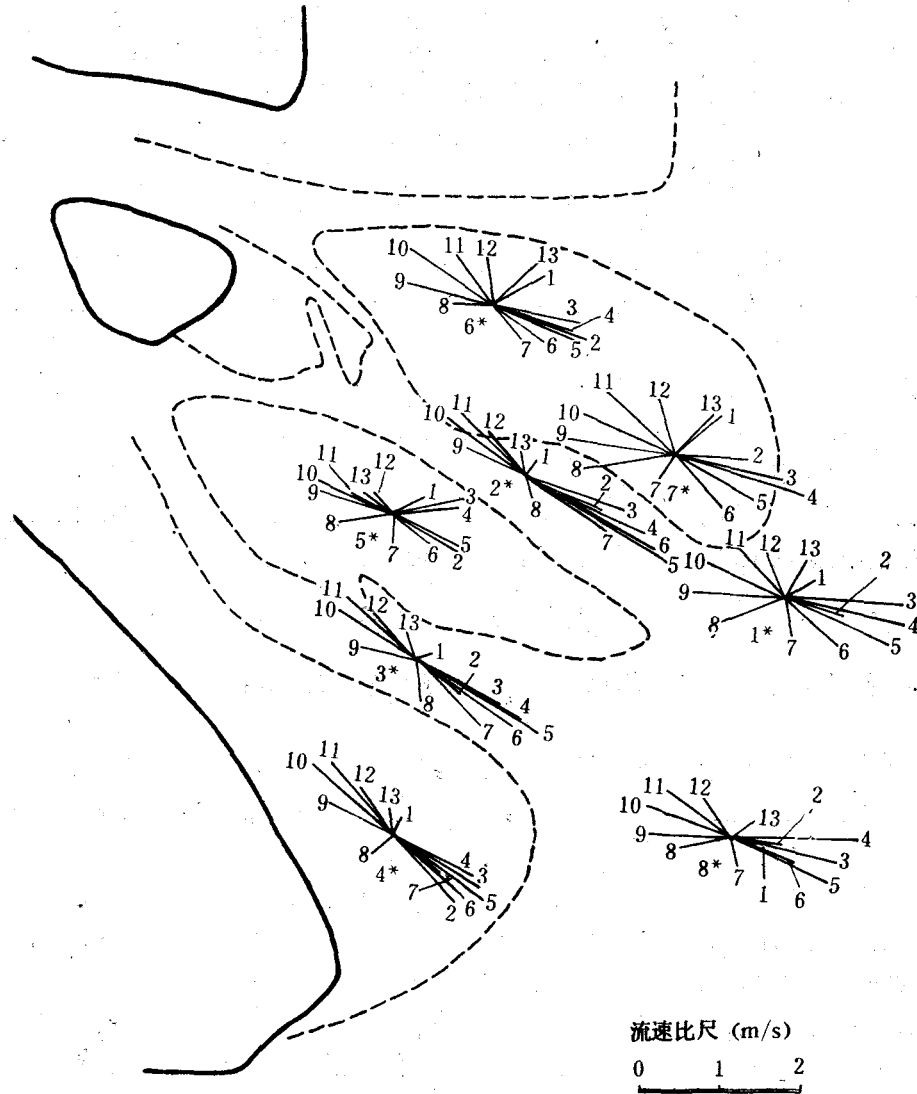


图 10 长江口区流态图

谢才系数 $c = \frac{1}{n} H^{1/6}$; 糙率 $n = 0.01$ 。

柯氏系数 $f = z\omega \sin \varphi (\omega = 7.27 \times 10^{-5}; \varphi = 31^\circ)$ 。

地形资料由长江口区的全测图得到。

对中浚潮位和南北槽下游的 C, A 两条垂线的流速流向进行验证。从验证计算结果来看,无论位相还是数值大小都与实测符合得比较好(图 8, 9)。

通过以上计算,对长江口区的潮流场有如下几点认识:

1. 潮流按其运动形式基本上可分为旋转流与往复流两种形式。旋转流是潮流运动的普遍形式,只有在狭窄的河道内由于受地形的约束才转化为往复流。长江口处于北半球,在柯氏力的作用下,潮流运动基本上作顺时针旋转。但长江口是分叉河口,潮波从几个汉

道传入后,由于受地形及径流的影响,位相与振幅不完全一样。

2. 长江口在拦门沙以东的外海水域,这里水面开阔,潮流呈旋转性质,基本是顺时针方向,长短轴不甚明显。图 10 中的 1* 位于鸡骨礁附近,是一个较典型的潮流椭圆图。

在拦门沙带内的航道区(例在北港、北槽、南槽航道上),水深相对较深,两侧有水下沙洲(例如九段沙、南汇边滩等)的限制,水流比较集中,潮流基本上是往复流(图 10 中的 2*, 3*)。

拦门沙带内的各浅滩水域,潮流变化比较复杂。靠近口外的地方受潮流影响较大,而靠近口内的地方,受航道主流影响较大,大致呈扇面状分布,但各处不完全一样(图 10 中的 4*—7*)。

3. 长江口潮流的涨落潮方向基本上是西北-东南向。拦门沙带上的浅滩,涨潮时水流漫滩而过。落潮流中有很大一部分是径流,由里向外流动时,由于受地形约束,水流归入主槽,流向比较集中。

4. 长江口区都是落潮历时大于涨潮历时,这是大量径流加入落潮流和潮波变形的结果。在深槽中,愈向上,落潮流历时愈长,涨潮流历时愈短。

六、结 语

本文所使用的长江口潮流的数值模式能较好地模拟长江口区潮流的流场,计算是成功的。

由于流体运动方程中非线性对流项的存在,在数值计算时,常常引起波动,即所谓“空间不稳定性”。为了保证计算的正常进行,人们常采用数字“光滑化”措施,目的是增加数值稳定性,其结果可能使解局部“失真”,特别是在地形及边界变化剧烈的地方。为了克服“空间不稳定性”,本文在运动方程中增加水平涡动粘滞项,使能量得到耗散。因此不需要在显式有限元法计算中常采用的“光滑化”措施,而能保证数值计算的稳定。这样,基本方程更为完整,物理概念明确。

本文所应用的二维潮流数值模式,解法简便和直观,将局部有限元法和有限差分法有机地结合起来,大大节省了计算时间和存储量,在中小型计算机上能解决较复杂的问题。

参 考 文 献

- [1] 赵士清、张镜潮, 1983. 一种简便的二维潮流数学模型. 水利水运科学研究 2: 15—23.
- [2] 村上和男, 1981. 有限要素法による潮汐流の数值計算. 港湾技研資料 404: 1—36.
- [3] 沈焕庭、潘定安, 1979. 长江口潮流特性及其对河槽演变的影响. 华东师范大学学报(自然科学版) 1: 131—144.
- [4] Willian, G. Gray, 1977. An Efficient Finite Element Scheme for Two-Dimensional Surface Water Computation, Finite Elements in Water Resource. pp. 4—60.

A NUMERICAL MODEL FOR TIDAL CURRENT IN THE CHANGJIANG RIVER ESTUARY

Zhao Shiqing

(*Nanjing Hydraulic Research Institute*)

ABSTRACT

This paper presents a generalized finite difference scheme for the solution of the two-dimensional tidal current equations expressed as being integrated over the vertical. In this paper the Changjiang River Estuary is simulated in order to investigate the effectiveness of the method on tidal current. The computational results agree well with the tidal current field survey data.

Plane domain is supposed to consist of triangular elements of weakly acute type. Partial derivatives of order 1 and 2 are defined at nodal points. In the basic equations of tidal current horizontal eddy viscosity term is also considered.

This method has a great advantage of having the flexibility to express the configuration. That is, the boundary configuration of the model is more accurate, and an interested area of the computation by the method can be divided into any small elements arbitrarily. Moreover, the computational cost of this method is cheaper.