

分析海洋三维长波运动的一种方法*

李春雁 刘凤树

(中国科学院海洋研究所, 青岛)

提要 本文将海洋长波运动中的流速水平分量, 表示为垂直平均流速与“偏差流速”之和, 导出平均流速、水位、偏差流速和界面应力的联合方程组, 用以研究长波运动的水位和三维流场, 并用此法求解了气压潮的非线性解析解, 对非线性效应和共振现象作了讨论。

为求解长波的三维运动 Welander (1957) 曾将线性问题分为“global”和“local”问题求解流速的三维结构^[4]。七十年代初, Heaps 提出了数值求解三维风暴潮和潮汐问题的谱方法^[7-11]。此后, Davies 提出用伽辽金近似数值求解三维水波方程^[5,6]。七十年代中期, 秦曾灏以准平衡方程为零级近似给出研究“超浅海”三维问题的方法^[2]。七十年代末, Johns 提出“湍能封闭法”数值研究类似三维问题^[12]。

本文在分析全流方法的适用范围并使之完备化的思想指导下, 提出一种研究三维长波运动的新方法。

一、方法的提出

考虑在非极地海区、 f 平面近似、局地坐标系中的常密度海水长波运动, 其数学描述通常取如下形式:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -g\nabla(\zeta - \zeta') + A_H \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

其中 z 坐标向下为正; \mathbf{v} 为流速; ζ 为水位; ζ' 为“静压潮”和“静力潮”之和;

$$\zeta' = -\frac{P_a}{\rho g} - \frac{\Phi}{g} \quad (\Phi \text{ 为引潮势; } P_a \text{ 为海面气压); } A_V, A_H \text{ 为湍粘性系数; } A_H \text{ 视为常数。}$$

设流体介质限定于 $z = z_1(x, y, t)$, $z = z_2(x, y, t)$ 两界面之间, 令

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \quad \bar{\mathbf{v}} = \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{v} dz / (z_2 - z_1)$$

对两个动量方程积分并利用连续性方程和界面处的运动学、动力学条件可推得:

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} - f\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{v}} = -g\nabla(\zeta - \zeta') + A_H \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}$$

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第1201号。

本文承蒙冯士筵教授和方国洪研究员提出宝贵意见, 在此致谢。

收稿日期: 1985年4月29日。

$$+ \frac{\tau_1 - \tau_2}{\rho(z_2 - z_1)} - \frac{1}{\rho(z_2 - z_1)} \nabla \cdot [(z_2 - z_1)\bar{\sigma}] + \epsilon$$

其中,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{\bar{d}t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y}; \quad \tau_{1,2} = -\rho A_V \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Big|_{z_{1,2}}; \\ \epsilon &= A_H \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\mathbf{v}' \Big|_{z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial x} + \mathbf{v}' \Big|_{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} \Big|_{z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} \Big|_{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mathbf{v}' \Big|_{z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial y} + \mathbf{v}' \Big|_{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y} \Big|_{z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y} \Big|_{z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial y} \right] / (z_2 - z_1) \end{aligned}$$

ϵ 是由界面偏差流速 (\mathbf{v}') 分布和界面起伏在侧湍流影响下产生的力。

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} -\int_{z_1}^{z_2} \rho u'^2 dz / (z_2 - z_1) & -\int_{z_1}^{z_2} \rho u' v' dz / (z_2 - z_1) \\ -\int_{z_1}^{z_2} \rho u' v' dz / (z_2 - z_1) & -\int_{z_1}^{z_2} \rho v'^2 dz / (z_2 - z_1) \end{bmatrix}$$

$\bar{\sigma}$ 为新的附加应力, 是一个二阶张量 (正如时均形式的 $N-S$ 方程中出现附加应力一样)。

以上方程在形式上与 Kuipers 和 Vreugdenhil 的结果类似^[9]。

用原始方程与上方方程相减得到:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}' - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial z} \right) - A_H \nabla^2 \mathbf{v}' \\ &= \frac{\tau_2 - \tau_1}{\rho(z_2 - z_1)} - \frac{1}{\rho(z_2 - z_1)} \nabla \cdot [(z_2 - z_1)\bar{\sigma}] - \epsilon - \delta \end{aligned}$$

其中,

$$\delta = \bar{u} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} + u' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y} + v' \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} + v' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y}$$

对平均运动的附加耗散力变成了偏差运动中永远为正的能源, 它不断从垂直平均运动中汲取促使这种偏差运动形成和增长的能量。相反, 平均运动的动能则源源不断地不可逆地转移给偏差量。新的附加应力不消耗宏观运动的能量, 只是起一种不可逆的能量转移作用。

当所论长波运动满足 $\mathbf{v}' \ll \bar{\mathbf{v}}$ 且在浅海时, 平均运动方程式中的附加力和侧粘性力及偏差流动方程中的附加力可以略去。

连续性方程式可采用直接积分所获得的精确形式:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(h + \zeta)\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial(h + \zeta)\bar{v}}{\partial y} = 0$$

对于潮汐运动来说, 除了在极浅的海域, $\mathbf{v}' \ll \bar{\mathbf{v}}$ 式可以认为是真确的, 而在诸如风暴潮之类表面剪切应力很大的问题中 $\mathbf{v}' \ll \bar{\mathbf{v}}$ 难以满足, 这时只可能作这样的近似: 除了不考虑附加力外, 同时不考虑对流项。

为了封闭方程组还要知道 τ_a, τ_b 的形式, 如可取:

$$\begin{aligned}\tau_a &= \rho_a C_D (\mathbf{w}_a - \mathbf{v}_{-\zeta}) |\mathbf{w}_a - \mathbf{v}_{-\zeta}| \\ \tau_b &= \rho C_D \cdot \mathbf{v}_h \cdot |\mathbf{v}_h|\end{aligned}$$

其中 $\rho_a, \rho, C_D, \mathbf{w}_a, \mathbf{v}_{-\zeta}, \mathbf{v}_h$ 分别为海面上的大气密度、海水密度、摩擦系数、海面风速、海面流速、海底流速。

$$\mathbf{v}' \text{ 的边界条件是: } \tau_{a,b} = -\rho A_V \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial z} \Big|_{z=-\zeta, h} \circ$$

在一定的初边值条件下便可求出 ζ, u, v 和 w (w 由连续方程给出)。

二、求解非线性气压波问题

问题 在一维等深水体之上有一无穷远处等速移来的气压波, 求水体的非线性运动。

对类似问题的探讨可以追溯到英国的 Proudman^[14,15] 和日本的山田彦晃^[13]。但他们仅讨论了线性问题且没有给出共振时的有界解。刘凤树^[1,13]也曾求解了一个线性问题, 得到了与 Sato 观测统计结果一致的结论。

求解 对上述问题可采用如下方程组描述:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h + \zeta) \bar{u}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= -g \frac{\partial (\zeta - \bar{\xi})}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial u'}{\partial z} \right) + \frac{C_D u_h |u_h|}{h + \zeta} \\ A_V \frac{\partial u'}{\partial z} \Big|_{z=h} &= -C_D u_h |u_h| \\ A_V \frac{\partial u'}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} &= 0 \\ u &= \bar{u} + u'\end{aligned}$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2, \left(\bar{\xi}_1 = \frac{-P_a}{\rho g}, \bar{\xi}_2 = -\frac{C_D \int u_h |u_h| / (h + \zeta) dx}{g} \right)$$

条件: (a) $h = \text{const.} > 0$; (b) $-\infty < x < +\infty$; (c) $-\infty < t < +\infty$; (d) $-\infty < U = \text{const.} < +\infty$; (e) $P_a = P_a(x - Ut)$; (f) $P_a \rightarrow 0$ 时 $\zeta \rightarrow 0, u \rightarrow 0$ 。

取定特征速度 U 和特征时间 T 后, 令

$$\begin{aligned}Z &= \zeta/h, \tilde{Z}_1 = \bar{\xi}_1/h, \bar{v} = \bar{u}/U, X = x/UT, \\ v' &= u'/U, \tau = t/T, \tau_0 = \rho_a C_D U^2, \\ \bar{v}_b &= \rho \tilde{u}_h |\tilde{u}_h| / \rho_a (1 + Z), z_0 = (z + \zeta) / (h + \zeta), \\ C &= A_V T / h^2 (1 + Z)^2, A = \tau_0 T / \rho h U, n = U^2 / gh\end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} + \frac{\partial (1 + Z) \bar{v}}{\partial X} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial(Z - \tilde{Z})}{\partial X} \\ \frac{\partial v'}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial z_0} \left(C \frac{\partial v'}{\partial z_0} \right) + A \tilde{\tau}_b \\ \frac{\partial v'}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} &= 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial z_0} \Big|_{z_0=1} = -A \tilde{\tau}_b / C \\ v &= \bar{v} + v'\end{aligned}$$

$$(*) \quad \tilde{Z} = \tilde{Z}_1 - n \int A \tilde{\tau}_b dX$$

条件: (a) $n \geq 0$; (b) $-\infty < X < +\infty$; (c) $-\infty < \tau < +\infty$; (d) $\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_1(X - \tau)$; (e) $\tilde{Z}_1 \rightarrow 0$ 时 $Z \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$ 。

显然,解具有 $Z = Z(X - \tau)$, $v = v(X - \tau)$ 的形式。可以证明,存在一个判别式:

$$C_0(n) = 3 \sqrt[3]{n/2} - (1 + n/2)$$

当 $\tilde{Z} > C_0(n)$ 时有实数解,否则无实解。

(1) 无粘性情况下

$$\begin{aligned}v &= Z/(1 + Z), \quad [\tilde{Z} > C_0(n)] \\ Z &= 2/3 \cdot (1 + n/2 + \tilde{Z}) \cos \{ 1/3 \cdot \arccos [1 - 27n/ \\ &\quad 4/(1 + n/2 + \tilde{Z})^3] + \alpha_1 \} - 1/3 \cdot (2 - n/2 - \tilde{Z}) \\ \alpha_1 &= \begin{cases} 0, & n \leq 1 \\ 4\pi/3, & n \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

当 $\tilde{Z} \ll 1$ 时其二级近似为

$$\begin{aligned}Z &\simeq [n - 1 \pm \sqrt{(1 - n)^2 + 6n\tilde{Z}}] / 3n, \\ &[\tilde{Z} > -(1 - n)^2 / 6n]\end{aligned}$$

上式中正号对应于 $n < 1$, 负号对应于 $n > 1$ 。

$n \neq 1$ 时的一级近似为 $Z \simeq Z_L = \tilde{Z}/(1 - n)$ 。Proudman 曾由线性方程给出此式^[15]。

$n = 1$ 时的二级近似又可写为 $Z_0 = \pm \sqrt{2\tilde{Z}/3}$, ($\tilde{Z} > 0$) 这是用线性近似得不到的共振时的有界解。易知,当 $n = 1$ 时线性方程的微分算子不可逆,故而导致“共振”现象。

非线性项或粘性项的存在或者水平方向增加一维(可以证明)均可抑制这种数学形式上的共振,使算子可逆。此即平流项、粘性项及增加一维都能抑制共振的本质所在。

可以证明,无粘时若 $n < 1$ ($n > 1$), 则 Z 与 \tilde{Z} ($-\tilde{Z}$) 同时达极大或极小值。可见在本问题中无粘性时非线性效应只对水位、流速的值有影响,对位相毫无影响(除了 Z 与 \tilde{Z} 位相差为 π 的情形)。 $n = 1$ 时 Z 有两支解,一支与 \tilde{Z} 同相,另一支与 $-\tilde{Z}$ 同相(见图 1—4)。

(2) 有粘性情况下 当长波传播速度比强迫波大时 ($n < 1$), 在强迫波恒为零的波的后部水位必为零。这是由于自由波速大于强迫波移速,使自由波造成的波动效应都在强迫波之前的缘故。此特点不妨称为“无后效性”。反之,当 $n > 1$ 时则有“无前效性”。因此,

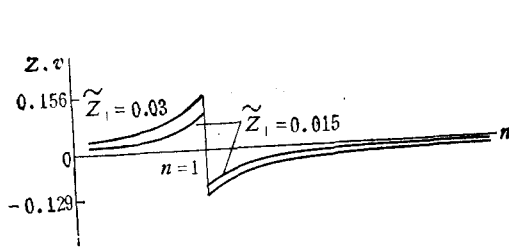


图1 Z-n (或 v-n) 曲线

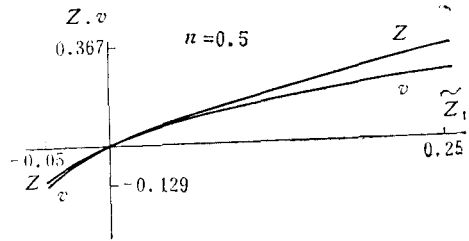


图2 n < 1 时的 Z-Z₁ 和 v-Z₁ 曲线

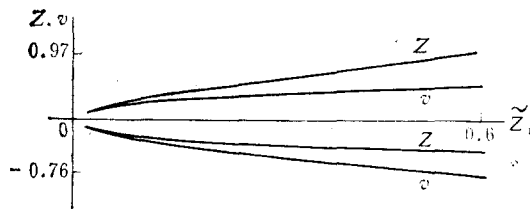


图3 n = 1 时的 Z-Z₁ 和 v-Z₁ 曲线

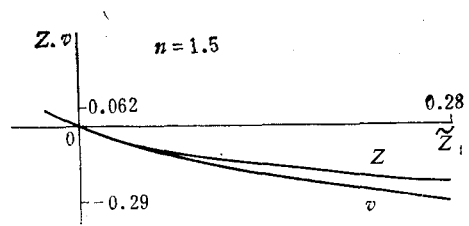


图4 n > 1 时的 Z-Z₁ 和 v-Z₁ 曲线

有粘性时的解为：

$$v = \bar{v} + v', \quad \bar{v} = Z/(1 + Z)$$

Z(ξ) 形式上不变,但其中的 \tilde{Z} 由(*)给出,其中,

$$n \int A \tilde{\tau}_b dX = E \int_{\alpha_2}^{\xi} [\bar{v}(\xi') + v'_i(\xi')] |\bar{v}(\xi') + v'_i(\xi')| / (1 + Z(\xi')) d\xi'$$

$$v'(\xi) = 2A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \int_X^{\xi} [\bar{v}(\xi' - \xi) + v'_i(\xi' - \xi)]$$

$$\cdot |\bar{v}(\xi' - \xi) + v'_i(\xi' - \xi)| / [1 + Z(\xi' - \xi)]$$

$$\cdot (-1)^m \cos(m\pi z_0) \exp(-\pi^2 m^2 C_0 \cdot (X - \xi') / (1 + Z(X - \xi'))^2) d\xi'$$

其中, $n = U^2/gh$; $A_0 = C_D TU/h$; $C_0 = A_V T/h^2$; $E = C_D TU^3/gh^2$; $v'_i(\xi) = v'(\xi)|_{z_0=1}$;

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\infty & n \leq 1 \\ +\infty & n > 1. \end{cases}$$

v' 是这样获得的: 取 $A_V = \text{const.}$, 设 $\tau = 0$ 时强迫波中心离 $X = 0$ 很远, 则在 $X \geq 0$ 的范围内 $\tau > 0$ 时, v' 用初值问题代替之, 再由拉氏变换法即可求出。

取在 $|\xi| \leq 1$ 处 $\tilde{Z}_1(\xi) = 0.03 \cos(\xi\pi/2)$, 其它处为零, 用叠代法对 $n < 1$ 时的几种情况作计算。结果见图 5 和图 6 所示。

总之, 我们获得了无粘时这个气压波非线性问题的显式精确解, 此解在 $n = 1$ (气压波移速与长波速度 \sqrt{gh} 相等) 时有第一类间断, 解分为两支。有粘时可获隐式连续解析解。无粘解的水位与“静压潮”在 $n < 1 (>1)$ 时同(反)号。线性共振解的无限增长是由于线性方程在共振时算子不可逆所致。而非线性项或粘性项的存在都可使算子在 $n = 1$ 时成为可逆。 n 越接近 1, 线性近似越不可靠。不难发现增加一维也可使线性方程的算

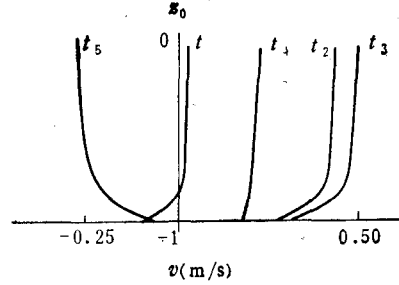
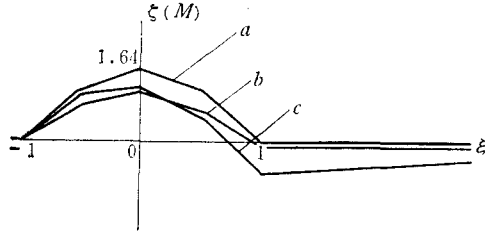


图5 $n < 1$ 时非线性解的水位 图6 $n < 1$ 时非线性解的流速垂直分布 ($U = 12\text{m/s}$)

a. $U = 12\text{m/s}$ 时的无粘性解; b. $U = 8\text{m/s}$ 时的有粘性解; c. $U = 12\text{m/s}$ 时的有粘性解。

子在共振时仍然可逆,即可以抑制解的形式上的“共振现象”。有粘性时 n 越接近于 1, 最高水位越大,但位相滞后越长、波前减水越显著。另外,不是任意气压波都有解存在,当气压波高出一定值时解不存在,此时海水露出底面。

三、结 语

通过将流速分为垂直平均值与偏差量之和获得了平均流速、水位、偏差流速和界面应力的联合方程组。分析表明,偏差量对平均量也产生表观上的耗散作用,但这种耗散作用是二维的(水平的)。相比之下,雷诺应力是扰动量的扰动速度输运引起的,它显出对时间平均运动的一种三维的耗散作用。在许多研究风生长波的工作中,采用含有平流项的全流方程^[6]是值得怀疑的。因为这时偏差量引起的附加耗散力很可能在量级上不小于平流项。侧向湍流与界面的凹凸也会对平均运动产生新的附加力,但这个力不是耗散力。对平均运动的附加耗散力不断地把平均运动的动能不可逆地转移给偏差量,促成偏差运动的形成和增长。偏差量在水平方向只是通过界面应力间接地与水位梯度和地形等有关。它们在水平方向的藕合至多与平流项量级相当。

用这种方法研究三维长波问题比 Heaps 的谱方法, Davies 的 Galerkin 方法等各种求解手段在形式上简单,在方程本身的形式上和可能求出的解析解的形式中含有较为直观的物理意义。

参 考 文 献

- [1] 刘凤树、孙文心, 1984. 近岸海区台风潮波的研究. 海洋与湖沼 16(4): 419—429.
- [2] 秦曾灏、冯士筌, 1975. 浅海风暴潮机制的初步研究. 中国科学 1: 64—78.
- [3] 山田彦兒, 1935. 進行低氣壓に依る高潮(一). 海と空 16(11): 1—14.
- [4] Csanady, G. T., 1982. Circulation in the coastal ocean. London. pp. 16—17.
- [5] Davies, A. M., 1977. The numerical solution of the three-dimensional hydrodynamic equations using a B-spline representation of the vertical current profile. *Bonom Turbulence*, Proceedings of the 8th Liege Colloquium on Ocean Hydrodynamics (ed. J. C. J. Nihoul) Published Elsevier, *Elsevier Oceanography Series* 19: 1—25.
- [6] Davies, A. M., 1980. Application of the Galerkin method to the formulation of a three-dimensional non-linear hydrodynamic numerical sea model. *Applied Mathematical Modelling* 4: 245—256.

- [7] Heaps, N. S., 1972. On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and surges. *Mem. Soc. Sci. Liege. Ser. 6*(2): 143—180.
- [8] Heaps, N. S., 1973. Three-dimensional numerical model of the Irish Sea. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **35**: 99—120.
- [9] Heaps, N. S., 1976. On formulating a non-linear numerical model in three dimensions for tides and storm surges. *Computing Methods in Applied Sciences*. (ed. R. Glowinski and J. L. Lions) Berlin: Springer-Verlag. (*Lecture Notes in Physics* 58). pp. 368—387.
- [10] Heaps, N. S., 1978. Linearized vertically-integrated equations for residual circulation in coastal seas. *Deutsche Hydrographische. Z. Jahrgang* **31**(5): 147—169.
- [11] Heaps, N. S., 1981. Three-dimensional model for tides and surges with vertical eddy viscosity Prescribed in two layers. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **64**: 291—320.
- [12] Johns, B., 1978. The modelling of tidal flow in a channel using a turbulence energy closure scheme. *Journal of Physical Oceanography* **8**: 1042—1049.
- [13] Liu Fengshu, 1982. An analysis on some characteristics of storm surges by typhoon. *Collected Oceanic Works* **2**(5): 5—17.
- [14] Proudman, J., 1929. The effects on the sea of changes in atmospheric pressure. *Geophys. Supp. M. N. R. Astron. Soc.* **2**: 197.
- [15] Proudman, J., 1953. *Dynamical Oceanography*. London. pp. 409.
- [16] Штокман, В. Б., 1946. Уравнения поля Голных лотоков возбуждаемых ветром в неоднородном море. *ДАН ССР* **54**(5): 403—406.

A METHOD FOR ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL OCEANIC LONG WAVE MOTION*

Li Chunyan and Liu Fengshu

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao*)

ABSTRACT

It is suggested in the paper that the horizontal components of velocity in the oceanic long wave motion be expressed by the vertically averaged velocity and the deviate velocity. A set of equations including the vertically averaged velocity, the water height, the deviate velocity and the surface stress as variables are deduced for the study of the long wave motion. A non-linear analytical solution of a low atmospheric pressure induced motion is found using the method. Some non-linear effects and resonance phenomena are discussed.

* Contribution No. 1201 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.