

## 摩擦和 $\beta$ 效应对地形拦截波的影响

秦曾灏 刘秦玉

(上海台风研究所) (山东海洋学院, 青岛)

**提要** 利用含湍流粘性的  $\beta$  平面正压海洋线性扰动方程组和刚盖近似, 针对大陆架上为指数剖面、深海大洋为平坦的海底地形以及任意走向的直线海岸线, 研究得到了流函数的图象和相应的波频散关系以及波的约束条件, 讨论了摩擦、 $\beta$  效应、海岸线的走向和陆架宽度对波动性质的影响。

由于地形拦截波 (coastal trapped waves) 和陆架环流、近岸上升流、风暴潮和西边界流动有密切的关系, 国内外海洋学者先后对它进行了大量的研究<sup>[1-5,7,8]</sup>。这些研究多半局限于  $f$  平面上的地形拦截波, 而且海岸线的走向是被固定了的。Takeda<sup>[8]</sup> 研究了无粘正压海洋中  $\beta$  平面上地形拦截波的性质, 然而在他的工作中却没有考虑摩擦对波动的影响, 而摩擦至少在浅海陆架区是个不可忽视的因素。本文旨在采用刚盖近似, 针对大陆架上为指数剖面、深海大洋为平坦的海底地形以及任意走向的直线海岸, 研究了  $\beta$  平面上正压海洋的含底摩擦效应的二维地形拦截波的性质和波的约束条件, 讨论了底摩擦、 $\beta$  效应、海岸线走向和陆架宽度对波动性质的影响。

### 一、控制方程

如果运动的水平特征尺度小于外 Rossby 变形半径  $L_0 = \sqrt{gh_0/f_0}$  ( $f_0$  为 Coriolis 参数  $f$  的特征值;  $g$  为重力加速度;  $h_0$  为平均海深), 则可采用刚盖近似, 从而过滤了作为重力波边缘波和 Kelvin 波<sup>[6]</sup>。于是含底摩擦效应的均质海洋中的近似线性动力学方程组为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - Ru \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - Rv \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) = 0 \quad (3)$$

其中,  $t$  是时间; 局地正交坐标  $oxy$  与地球面相切;  $x$  轴与局地东向轴的夹角为  $\theta$ , 规定  $\theta$  角以逆时针方向旋转为正;  $y$  轴为直线海岸 (图 1);  $z$  轴与  $oxy$  平面垂直, 并指向局地天顶;  $u, v$  为沿  $x, y$  方向的深度平均流速分量;  $\eta$  为海面起伏;  $R$  为底阻滞系数, 设为常量;  $h$  为海深。

取  
其中

$$f = f_0 + \beta_x x + \beta_y y \quad (4)$$

$$\beta_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \beta \sin \theta, \quad \beta_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \beta \cos \theta, \quad \beta = \frac{2\Omega \cos \rho}{a},$$

$a$  为地球平均半径,  $\Omega$  为地球自转角速度。由(3)式, 可引入流函数  $\phi$ , 它满足:

$$u = -\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

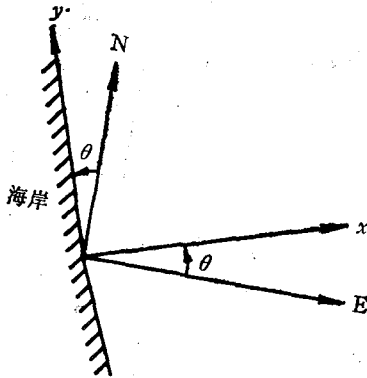


图 1 海岸与坐标系

Fig. 1 Coast and coordinate system

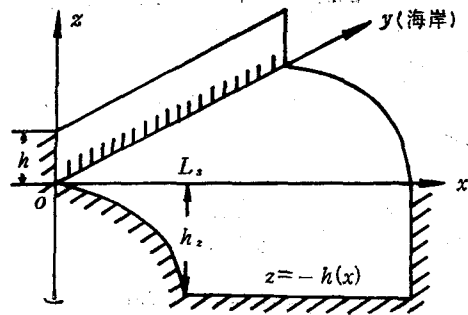


图 2 海深剖面图

Fig. 2 Sectional view of deep sea

为了简单, 考察如下的海深剖面<sup>[5]</sup>(图 2)

$$h(x) = \begin{cases} h_1 e^{2bx} & 0 \leq x \leq L_s \\ h_2 = h_1 e^{2bL_s} & L_s \leq x \leq L \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $L_s$  为陆架宽度;  $L$  为海域长度;  $h_1, h_2, b, L_s, L$  均为常数。于是可得在  $[0, L_s]$  和  $[L_s, L]$  区间内流函数  $\phi_1$  和  $\phi_2$  应满足的微分方程式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + R\right) \left(\nabla_H^2 \phi_1 - 2b \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right) + \beta_y \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (2f_0 b - \beta_x) \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad 0 \leq x \leq L_s \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + R\right) \nabla_H^2 \phi_2 + \beta_y \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \beta_x \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0 \quad L_s \leq x \leq L \quad (7)$$

其中,  $\nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为二维 *nabla* 算子。

相应的边界条件为

$$x = 0, \quad \phi_1 = 0 \quad (8)$$

$$x = L, \quad \phi_2 = 0 \quad (9)$$

在  $x = L_s$  处, 解应满足一定的衔接条件。如设  $h = h(x)$  并令波解为  $\phi = \psi(x) e^{i(l y - \omega t)}$ , 其中  $\psi(x)$  为流函数  $\phi$  的振幅因子;  $l$  为沿  $y$  方向的波数,  $\omega$  为圆频率,  $i = \sqrt{-1}$ 。将此解代入方程(6), (7), 利用函数  $h(x)$  和  $\psi(x)$  在  $x = L_s$  处连续的条件, 并认为  $x = L_s$  处纬度间断小到可以忽略不计, 则可推出衔接条件为:

$$x = L_s \text{ 处 } \psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}. \quad (10)$$

## 二、波的约束条件

从式(6), (7)看出,所讨论的波动属于阻尼波动。这类波动在不同的情况下应满足一定的约束条件。设方程(6)具有波解:

$$\phi_1 = \Psi_1(x) e^{\omega_i t} e^{i(l y - \omega_r t)} \quad (11)$$

其中,圆频率  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ,  $\omega_r$  和  $\omega_i$  分别代表  $\omega$  的实部和虚部,  $\Psi_1(x) = \Phi_1(x) \cdot e^{-\frac{\beta}{2}x}$  为振幅因子,  $B = -2b + \frac{\beta_y(r + i\omega_r)}{\omega_r^2 + r^2}$ ,  $r = \omega_i + R$ , 则  $\Phi_1(x)$  应满足如下的常微分方程:

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} - (D + iE)\Phi_1 = 0, \quad 0 \leq x \leq L_s \quad (12)$$

其中,

$$D = \frac{1}{4} \left( \frac{\beta_y r}{\omega_r^2 + r^2} - 2b \right)^2 - \frac{\beta_y^2 \omega_r^2}{4(\omega_r^2 + r^2)^2} + l^2 + \frac{(2f_0 b - \beta_x) l \omega_r}{\omega_r^2 + r^2} \quad (13)$$

$$E = \frac{1}{2(\omega_r^2 + r^2)^2} [2lr(\beta_x - 2f_0 b)(\omega_r^2 + r^2) + \beta_y^2 \omega_r r - 2\beta_y b \omega_r (\omega_r^2 + r^2)]$$

均为实数。令  $\Phi_1 = \Phi_r + i\Phi_i$ , 则有与方程(12)相当的下列两个方程成立:

$$\frac{d^2 \Phi_r}{dx^2} - D\Phi_r + E\Phi_i = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dx^2} - E\Phi_r - D\Phi_i = 0. \quad (15)$$

利用边界条件(8)和对上述方程进行数学推导,则有:

$$\left( \Phi_i \frac{d\Phi_r}{dx} - \Phi_r \frac{d\Phi_i}{dx} \right)_{x=L_s} + E \int_0^{L_s} |\Phi_1|^2 dx = 0 \quad (16)$$

其中,  $|\Phi_1|^2 = \Phi_r^2 + \Phi_i^2$ 。对于  $x \geq L_s$  的深海大洋区,依据考察湍摩擦的不同,分下述两种情形进行讨论。

### (一) 在陆架区内 ( $x \leq L_s$ ) 外 ( $x \geq L_s$ ) 取同一湍粘滞性的情形

设方程(7)具有波解

$$\phi_2 = \Psi_2(x) e^{\omega_i t} e^{i(l y - \omega_r t)} \quad (17)$$

其中,  $\Psi_2(x) = \Phi_2(x) e^{-\frac{\beta_1}{2}x}$ ,  $B_1 = \frac{\beta_y(r + i\omega_r)}{\omega_r^2 + r^2}$ 。将此解代入方程(7),并利用边界条件(9),(10),通过一定的数学推导则得:

$$E \int_0^{L_s} |\Phi_1|^2 dx + e^{-2\beta L_s} E' \int_{L_s}^L |\Phi_2|^2 dx = 0 \quad (18)$$

其中,

$$E' = \frac{r}{4(\omega_r^2 + r^2)^2} [4\beta_x l (\omega_r^2 + r^2) + 2\beta_y^2 \omega_r] \quad (19)$$

欲使 (18) 式成立, 必须保持  $E$  和  $E'$  符号相异。这就是本情形下波动的约束条件。依据 (13), (19) 式, 此条件进一步被具体化为下列 7 种情形。

1. 存在  $\beta_x$  和海底坡度  $\frac{dh}{dx}$  的最小值:  $(\beta_x)_{\min}$  和  $\left(\frac{dh}{dx}\right)_{\min}$

$$(\beta_x)_{\min} = -\frac{\beta_y^2 \omega_r}{2l(\omega_r^2 + r^2)} \left(\frac{dh}{dx}\right)_{\min} = \frac{hr[\beta_y^2 \omega_r + 2\beta_x l(\omega_r^2 + r^2)]}{(\beta_y \omega_r + 2f_0 l r)(\omega_r^2 + r^2)}。$$

特别当波有沿岸反向传播的分量时 ( $\omega_r/l < 0$ ), 则  $\beta_x > 0$ , 即要求海岸线的走向界于  $0 < \theta < 180^\circ$ 。

2. 存在  $\beta_x$  和海底坡度  $\frac{dh}{dx}$  的最大值:

$$(\beta_x)_{\max} = -\frac{\beta_y^2 \omega_r}{2l(\omega_r^2 + r^2)}, \left(\frac{dh}{dx}\right)_{\max} = \frac{hr[\beta_y^2 \omega_r + 2\beta_x l(\omega_r^2 + r^2)]}{(\beta_y \omega_r + 2f_0 l r)(\omega_r^2 + r^2)}。$$

特别当波有沿岸传播的分量时 ( $\omega_r/l > 0$ ), 则  $\beta_x < 0$ , 即要求海岸线的走向界于  $180^\circ < \theta < 360^\circ$ 。

3.  $\beta_x = -\frac{\beta_y^2 \omega_r}{2l(\omega_r^2 + r^2)}$  和  $\frac{dh}{dx} = \frac{hr[\beta_y^2 \omega_r + 2\beta_x l(\omega_r^2 + r^2)]}{(\beta_y \omega_r + 2f_0 l r)(\omega_r^2 + r^2)}$  并存: 作为特例, 这与不计  $\beta$  效应的平坦海底情形吻合。这相当于陆架波的消失。

4. 弱减幅波情形: 指波的振幅衰减率  $\omega_i < 0$ , 但其绝对值  $|\omega_i| < R$ , 从而  $r > 0$ 。

(1) 当海岸线呈东西走向时 ( $\theta = \pm 90^\circ$ ,  $\beta_y = 0$ ),

$$E = \frac{lr(\beta_x - 2f_0 b)}{\omega_r^2 + r^2}, E' = \frac{lr\beta_x}{\omega_r^2 + r^2} \quad (20)$$

(a) 当海岸线呈自东到西向时 ( $\theta = 90^\circ$ ,  $\beta_x = \beta > 0$ ), 则要求海底坡度

$$\frac{dh}{dx} > \frac{\beta h}{f_0} > 0。$$

(b) 当海岸线呈自西到东向时 ( $\theta = -90^\circ$ ,  $\beta_x = -\beta < 0$ ), 则要求海底坡度

$$\frac{dh}{dx} < -\frac{\beta h}{f_0} < 0。$$

(2) 当海岸线呈南北走向时 ( $\beta_x = 0$ ),

$$E = \frac{1}{2(\omega_r^2 + r^2)^2} [\beta_y^2 \omega_r r - 2\beta_y b \omega_r (\omega_r^2 + r^2) - 4f_0 b l r (\omega_r^2 + r^2)]$$

$$E' = \frac{\beta_y^2 \omega_r r}{2(\omega_r^2 + r^2)^2} \quad (21)$$

若令

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_c = \frac{hr\beta^2 \omega_r}{(2f_0 l r \pm \beta \omega_r)(\omega_r^2 + r^2)} \quad (22)$$

其中正号对应  $\theta = 0^\circ$ , 负号对应  $\theta = 180^\circ$ 。

(a) 当波有沿岸正向传播分量时, 要求  $\frac{dh}{dx} < \left(\frac{dh}{dx}\right)_c$ 。

(b) 当波有沿岸反向传播分量时, 要求  $\frac{dh}{dx} > \left(\frac{dh}{dx}\right)_c$ 。

5. 强减幅波情形: 指波的振幅衰减率  $\omega_i < 0$ , 但绝对值  $|\omega_i| > R$ , 从而  $r < 0$ 。此时, 波动要求海底坡度条件与弱减幅波情形下的恰好相反。

6. 当  $\omega_i = -R < 0$  即  $r = 0$  情形: 此时  $E$  和  $E'$  蜕化为

$$E = -\frac{\beta_y b}{\omega_r}, E' = 0 \quad (23)$$

为满足(18)式, 必需要求  $\beta_y = 0 (b \neq 0)$  或  $\beta_y \neq 0 (b = 0)$ , 前者相当于海岸线呈东西走向含底形坡度的耗散型 Rossby 波或  $f$  平面上的耗散型陆架波; 后者相当于平坦海底情形的耗散型 Rossby 波, 陆架波不复存在。

7. 当不计  $\beta$  效应时:  $E$  与  $E'$  分别蜕化为

$$E = -\frac{2f_0 b l r}{\omega_r^2 + r^2}, E' = 0 \quad (24)$$

故约束条件则是  $f_0 b l r = 0$ 。  $f_0$  与  $l$  不能为零, 则或  $b = 0 (r \neq 0)$  或  $r = 0 (b \neq 0)$ 。前者相当于平坦海底情形, 此时陆架波消失, 只有阻尼惯性波存在; 后者相当于  $\omega_i = -R < 0$  为  $f$  平面上的阻尼陆架波。

上述在陆架区内外取同一湍粘滞系数显然过高地估计了陆架区外的湍摩擦因素, 下列情形则更为逼真。

(二) 在陆架区内 ( $x \leq L_s$ ) 取  $r = \omega_i + R$ , 在陆架区外 ( $x > L_s$ ) 的深海大洋取  $r = \omega_i (R = 0)$  的情形

设方程 (7) 具有波解

$$\phi_2 = \Psi_3(x) e^{\omega_i t} e^{i(l y - \omega_r t)} \quad (25)$$

其中,  $\Psi_3(x) = \Phi_3(x) e^{-\frac{B'_1}{2} x}$ ,  $B'_1 = \frac{\beta_y (\omega_i + i \omega_r)}{\omega_r^2 + \omega_i^2}$ 。

将 (25) 式代入方程 (7), 并利用边界条件 (9), (10) 得到

$$E \int_0^{L_s} |\Phi_1|^2 dx + e^{2\mu_r} E'' \int_{L_s}^L |\Phi_3|^2 dx + e^{2\mu_r} B'_1 |\Phi_3|^2_{x=L_s} - B_i |\Phi_1|^2_{x=L_s} = 0 \quad (26)$$

其中,

$$B_i = \frac{B_y \omega_r}{2(\omega_r^2 + r^2)}, B'_i = \frac{\beta_y \omega_r}{2(\omega_r^2 + \omega_i^2)},$$

$$E'' = \frac{1}{4(\omega_r^2 + \omega_i^2)^2} [4l \beta_x \omega_i (\omega_r^2 + \omega_i^2) + 2\beta_y^2 \omega_r \omega_i]$$

$$\mu_r = -b L_s + \frac{\beta_y L_s [r(\omega_r^2 + \omega_i^2) - \omega_i(\omega_r^2 + r^2)]}{2(\omega_r^2 + r^2)(\omega_r^2 + \omega_i^2)}$$

(26) 式为波动应满足的约束条件, 由于此条件较复杂, 现仅讨论几个特例。

1. 弱减幅波情形: 当海岸线呈东西走向时, (26) 式蜕化为

$$e^{2\mu_r} E \int_0^{L_s} |\Phi_1|^2 dx + E'' \int_{L_s}^L |\Phi_3|^2 dx = 0 \quad (27)$$

其中,

$$E = \frac{l r (\beta_x - 2f_0 b)}{\omega_r^2 + r^2}, \quad E'' = \frac{\beta_x l \omega_i}{\omega_r^2 + \omega_i^2} \quad (28)$$

(27)式成立的必要条件是  $E$  和  $E''$  的符号相异。

(a) 海岸线呈自西向东时 ( $\theta = -90^\circ$ ) 要求  $\frac{dh}{dx} > -\frac{\beta h}{f_0}$ 。

(b) 当海岸线呈自东向西向时 ( $\theta = 90^\circ$ ) 要求  $\frac{dh}{dx} < \frac{\beta h}{f_0}$ 。

2. 强减幅波情形：当海岸线呈东西走向时，波动约束条件则与弱减幅波情形时恰好相反。

3. 当不计  $\beta$  效应时： $B_i = B'_i = 0$ ，(27) 式仍然成立，但

$$E = \frac{-2f_0 b l r}{\omega_r^2 + r^2}, \quad E'' = 0 \quad (29)$$

这与前面的第 7 种情形一样。

### 三、波的传播

为了简便，在讨论波的频散关系时，将海域长度  $L$  取作无限。现在对常微分方程组 (6), (7) 在边界条件 (8), (9) 和衔接条件 (10) 下求解得到：

$$\Phi_1 = A_1 (e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (30)$$

$$\Phi_3 = B_2 e^{\alpha_3 x}, \quad L \leq x < \infty \quad (31)$$

其中， $A_1, B_2$  均为积分常数； $\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{D + iE}$ ； $\alpha_3 = -\sqrt{D'' + iE''}$ ；

$$D = \frac{1}{4} \left( \frac{\beta_y r}{\omega_r^2 + r^2} - 2b \right)^2 - \frac{\beta_y^2 \omega_r^2}{4(\omega_r^2 + r^2)^2} + l^2 + \frac{(2f_0 b - \beta_x) l \omega_r}{\omega_r^2 + r^2}；$$

$$D'' = \frac{1}{4(\omega_r^2 + \omega_i^2)^2} [\beta_y^2 (\omega_i^2 - \omega_r^2) + 4l^2 (\omega_r^2 + \omega_i^2)^2 - 4l \beta_x \omega_r (\omega_r^2 + \omega_i^2)]。$$

根据量级比较得知， $\text{Re} \alpha_3 < 0$ 。利用衔接条件 (10) 得  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ，即  $D + iE = 0$ ，则

$$D = 0, \quad \text{且} \quad E = 0 \quad (32)$$

由上述结论可推出，当  $\beta_y \neq 0$  时：

$$r_1 = 0, \quad (\omega_i)_1 = -R, \quad (\omega_r)_1 = 0 \quad (33)$$

$$r_2 = \frac{\beta_y^2 A}{2[l(2f_0 b - \beta_x) + b\beta_y A](1 + A^2)}, \quad (\omega_r)_2 = r_2 A \quad (34)$$

$$(\omega_i)_2 = -R + r_2$$

$$r_3 = -\frac{\beta_y^2 A}{2[l(2f_0 b - \beta_x) - b\beta_y A](1 + A^2)}; \quad (\omega_r)_3 = -r_3 A \quad (35)$$

$$(\omega_i)_3 = -R + r_3$$

其中，

$$A = \frac{\sqrt{2l}}{2b} \sqrt{1 + F^2 + \sqrt{(1 + F^2)^2 + \frac{4b^2 F^2}{l^2}}}, \quad F = \frac{2f_0 b - \beta_x}{\beta_y}$$

(33)–(35)式分别给出了三种波动的频率和波幅衰减率。故流函数为:

$$\phi_1(x, y, t) = A_1(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})e^{[b - \frac{\beta_y r}{2(\omega_r^2 + r^2)}]x} e^{\omega_i t} e^{i(m_1 x + l y - \omega_r t)}, \quad (0 \leq x \leq L_s) \quad (36)$$

$$\phi_2(x, y, t) = B_2 e^{[\alpha_4 - \frac{\beta_y \omega_i}{2(\omega_r^2 + \omega_i^2)}]x} e^{\omega_i t} e^{i(m_2 x + l y - \omega_r t)} \quad L_s \leq x < \infty \quad (37)$$

其中,

$$m_1 = -\beta_y \omega_r / 2(\omega_r^2 + r^2), \quad m_2 = -\frac{\beta_y \omega_r}{2(\omega_r^2 + \omega_i^2)}$$

分别为  $\phi_1$  和  $\phi_2$  的  $x$  方向波数。这说明由于考虑了  $\beta$  效应和海岸线走向并非东西向 ( $\beta_y \neq 0$ ), 导致波垂直于海岸方向传播,  $x$  方向的相速度分别为  $-2(\omega_r^2 + r^2)/\beta_y$  ( $0 \leq x \leq L_s$ ) 和  $-2(\omega_r^2 + \omega_i^2)/\beta_y$  ( $L_s \leq x < \infty$ ), 若  $\beta_y > 0$ , 则波有向岸方向的传播分量; 反之,  $\beta_y < 0$ , 则有波的离岸传播分量。

从以上讨论可知,  $\beta_y \neq 0$  时, 三列波中有两列反向传播的进行波。对  $(\omega_i)_1$  和  $(\omega_i)_2$  表达式中两项的量级估计表明: 第二项(和  $\beta$  有关的项)比第一项远小得多, 因而这三列波构为阻尼波; 两列反向传播的波有明显的频率不对称性; 波属于频散波, 频率不仅与海底坡度有关, 还与海岸的非东西走向及  $\beta$  效应有关。

底摩擦的作用只反映在波幅的阻尼衰减上, 但却不影响波频率(和相速度)。由于  $\beta_y$  对波幅衰减率  $(\omega_i)_2$  和  $(\omega_i)_3$  的贡献很小, 以致  $(\omega_i)_2 \approx (\omega_i)_3 \approx -R < 0$ , 即为摩擦阻尼波。波幅的衰减率几乎完全由底阻滞系数  $R$  决定。如果认为  $e^{-x} = 0.04$  是一个小量, 那么当时间超过  $\pi/R$  值以后, 即可认为波已被耗散殆尽。如取  $R \sim 10^{-4}/s$ , 则波的消失时间约为数小时; 如取  $R \sim 10^{-5}/s$ , 则波的消失时间约需数天。

下面讨论几种情形。

1. 不计  $\beta$  效应的情形:  $(\omega_r)_1 = 0$ ,  $(\omega_r)_3 = -\frac{2f_0 b l}{b^2 + l^2}$ , 而  $(\omega_r)_2$  不复存在, 这是一列底形 Rossby 波。

由于未考虑  $\beta$  效应, 波不再有和海岸垂直方向的分量, 并且波由双向传播变成单向传播了。相速度  $\mathbf{c} = \mathbf{j} \left( -\frac{2f_0 b}{b^2 + l^2} \right)$ ; 群速度  $\mathbf{c}_g = \mathbf{j} \left( -\frac{2f_0 b(b^2 - l^2)}{(b^2 + l^2)^2} \right)$ 。可见, 此时波速与群速不同。在北半球, 当  $y$  轴方向波数  $l < b$  时,  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{c}_g$  方向一致;  $l > b$  则两者方向相反; 当  $l \ll b$ ,  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{c}_g$  都近似为  $-\frac{2f_0}{b} \mathbf{j}$ 。当底坡  $\frac{dh}{dx}$  为正时, 北半球的波为右岸波(波沿岸传播方向的右侧为海岸)。

2. 海岸呈东西走向 ( $\beta_y = 0$ ) 情形:  $(\omega_r)_1 = 0$ ,  $(\omega_r)_3 = -\frac{(2f_0 b \mp \beta)}{b^2 + l^2} l$  ( $\theta$  角取  $90^\circ$  时, 取负号;  $\theta$  角取  $-90^\circ$  时, 取正号)

$$\mathbf{c} = \mathbf{j} \left( -\frac{2f_0 b \mp \beta}{b^2 + l^2} \right), \quad \mathbf{c}_g = \mathbf{j} \left( -\frac{(2f_0 b \mp \beta)(b^2 - l^2)}{(b^2 + l^2)^2} \right)$$

一般地有  $\beta_x \sim \beta \sim 10^{-11}/m \cdot s$ ,  $b \sim 10^{-5}/m$ ,  $f_0 \sim 10^{-4}/s$  故  $O(\beta_x) \ll O(2f_0 b)$ 。因此, 尽管考虑了  $\beta$  效应, 但因海岸呈东西走向, 故波动的传播性质也与不计  $\beta$  效应时波的传播相似。

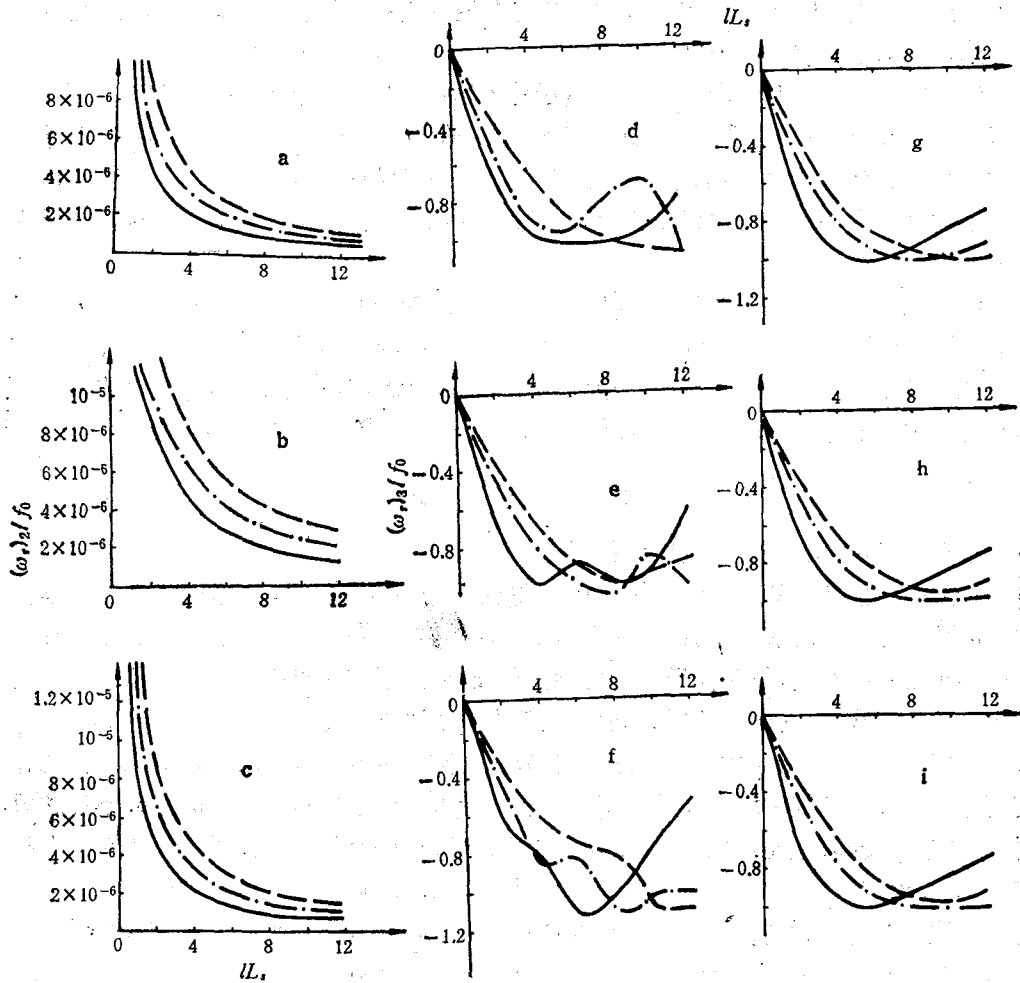


图 3 波频率曲线

Fig. 3 Frequency curve of wave

a.  $\theta = -45^\circ$ ; b.  $\theta = 0^\circ$ ; c.  $\theta = 45^\circ$ ; d.  $\theta = -45^\circ$ ; e.  $\theta = 0^\circ$ ; f.  $\theta = 45^\circ$ ;  
g.  $\theta = -90^\circ$ ; h.  $\theta = 90^\circ$ ; i.  $\beta = 0$ .

—  $L_s = 100\text{km}$ ; - - -  $L_s = 150\text{km}$ ; - · -  $L_s = 200\text{km}$ .

3.  $\beta_y \neq 0$  时波动性质: 若给定参数  $f_0 = 7.29 \times 10^{-5}/\text{s}$ ,  $\beta = 2 \times 10^{-11}/\text{m}\cdot\text{s}$ ,  $b = 5.4 \times 10^{-3}/\text{m}$  就  $L_s$  分别取 100, 150 和 200km 三种情况按不同海岸线走向 ( $\theta = 0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 90^\circ$ ) 依式 (33)–(35) 作出  $(\omega_r)_2/f_0$  和  $(\omega_r)_3/f_0$  随  $lL_s$  的变化曲线(图 3a–h), 并和  $\beta = 0$  的情形进行比较(图 3i), 从图可以看到以下情形。

(1) 在各波段范围内, 无因次频率  $(\omega_r)_2/f_0$  随无因次波数  $lL_s$  的增长而减小的图象, 不因海岸线走向的不同而有所变化。在波长较长的长波段 ( $lL_s < 0.4$ ),  $(\omega_r)_2/f_0$  随  $lL_s$  的增长而减小的趋势比较剧烈, 尤以海岸线呈  $\text{SE} \rightarrow \text{NW}$  走向的情形最为剧烈, 而对波长稍短 ( $lL_s > 0.4$ ) 的长波, 这种变化比较缓和。

(2) 在  $lL_s < 4-8$  的波数范围内,  $(\omega_r)_3/f_0$  随  $lL_s$  的增长而减小。在  $lL_s > 4-8$  的波数范围内, 对于陆架宽度  $L_s$  为 100 和 150km 的情况,  $(\omega_r)_3/f_0$  随  $lL_s$  的增长而



增大,这说明以  $lL_s = 4-8$  为界,相速度与群速度变更符号。在  $lL_s < 1.2$  的范围内,  $(\omega_r)_3/f_0$  随  $lL_s$  的增大几乎呈线性减小。

(3)  $(\omega_r)_2/f_0$  随  $lL_s$  的增长而减小的趋势不因陆架宽度  $L_s$  的增减而变化,但  $(\omega_r)_3/f_0$  则否。在  $lL_s < 4-8$  的波数范围内,  $(\omega_r)_3/f_0$  随  $lL_s$  的增大而减小的趋势随陆架宽度  $L_s$  的增大而变缓。即当陆架宽度相对大时,这种变化趋势比较平缓,因而对应的相速度和群速度也较小;反之,当陆架宽度相对小时,这种变化趋势比较平缓,因而对应的相速度和群速度便相对地较大。

(4) 在  $lL_s < 1.2$  的波数范围内,不论海岸线的走向如何,  $\beta$  因子对  $(\omega_r)_3/f_0$  的修正作用并不显著。对其余各波数,除了对东西走向的海岸线 ( $\theta = \pm 90^\circ$ ),  $\beta$  因子对  $(\omega_r)_3/f_0$  随  $lL_s$  的变化的修正微不足道外,对其他走向的海岸线则显示了一定的影响,尤其是对陆架宽度  $L_s < 200\text{km}$  的情形。

#### 四、结 语

根据上述讨论,主要结论归结如下。

1.  $\beta$  效应的存在或海岸并非东西走向,导致波动不再仅仅沿岸传播,还有和海岸垂直方向的传播分量;
2. 此类波动并非仅来源于地转参数和海底地形坡度,还和  $\beta$  效应及海岸线的非东西走向有关,但其性质仍为地形拦截波;
3. 除了东西走向的海岸线以外的其他任何走向的海岸线,存在两列传播方向相反、频率不等的波,其量级分别为  $10^{-5}/\text{s}$ ,  $10^{-10}/\text{s}$ ;
4. 相速度取决于波长、岸的走向、纬度、 $\beta$  效应、陆架宽度和海底坡度,而与摩擦的存在与否无关;
5. 相速度和群速度的数值不等。两者方向的配置是有条件的;
6. 不计  $\beta$  效应时,波呈单向传播,在北半球,如海深随离岸距离的增加而增大,则波沿海岸传播的右侧为海岸;如海深随离岸距离的增加而减小,恰得其反;
7.  $\beta$  效应和海岸的非东西走向以及摩擦均可使波幅随时间改变,但不论海岸的走向如何,实际波幅几乎完全受底摩擦随时间而消衰,其衰减率几乎完全由底阻滞系数决定;
8. 无因次频率  $(\omega_r)_2/f_0$  随无因次波数  $lL_s$  的增长而减小,这一规律不因海岸线走向和陆架宽度而变。而  $(\omega_r)_3/f_0$  随  $lL_s$  的增长而减小的规律只限于某一波数范围内,并以某个波数为界,群速度和相速度变更符号;
9. 除了对东西走向的海岸线外,  $\beta$  因子对  $(\omega_r)_3$  的修正有一定的作用,尤其是对陆架宽度小于  $200\text{km}$  的情形;
10. 本文给出了不同情况下这类波动必须满足的约束条件。

#### 参 考 文 献

- [1] 刘凤树, 1980. 平行海岸移行台风引起的风暴潮波. 海洋科学 1:38—45.
- [2] 刘凤树, 1984. 近岸海区台风潮波的研究. 海洋与湖沼 15(5):419—429.
- [3] 冯士筭, 1979.  $f$ -平面上宽陆架诱导阻尼波. 海洋学报 1(2):177—192.
- [4] 冯士筭, 1980. 常底坡有限宽陆架诱导阻尼波的一种模型. 海洋与湖沼 12(1):1—8.
- [5] Buchward, V. T. and J. K. Adams, 1968. The propagation of continental shelf waves. *Proc. Royal Soc. A305*: 235—250.
- [6] Leblond, P. H. and L. A. Mysak, 1978. *Waves in the Ocean*. Elsevier Scientific Publishing Company. New York, 602pp.
- [7] Mysak, L. A., 1980. Recent advances in shelf wave dynamics. *Review of Geophysics and Space Physics* 18 (1): 211—241.
- [8] Takeda, H., 1984. Propagation of topographically trapped waves on a  $\beta$ -plane. *Jour. of Oceanographical Society of Japan* 40(6): 432—436.

## ON THE BETA AND FRICTIONAL EFFECTS UPON THE C. T. WAVES

Qin Zenghao

(Shanghai Typhoon Institute)

Liu Qinyu

(Shandong College of Oceanography, Qingdao)

### ABSTRACT

This paper deals with the influences of bottom friction, variable Coriolis' parameter, coastline orientation and shelf width on the coastal trapped waves in a linear barotropic model ocean with a given exponential depth profile in the continental shelf region and constant depth in the deep-sea region. The main results obtained are as follows.

1.  $\beta$ -effect of non-westward and/or non-eastward oriented coastlines result in wave propagation along arbitrary horizontal direction for the coastal trapped waves.
2. Two wave trains travel with opposite directions and unequal frequencies (i.e.  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$  and  $10^{-10} \text{ s}^{-1}$  respectively) for all orientations of coastline with the exception of the coastline with westward and/or eastward orientations.
3. The phase velocity depends on wavelength, coastline orientation, latitude, variable Coriolis' parameter, bottom topography and shelf width whether the bottom friction is taken into account or not.
4. The phase velocity does not equal to the group velocity in magnitude. The directions of the wave phase and energy propagations are connected with each other conditionally.
5. When the water depth increases with distance perpendicular to the coastline and ignoring  $\beta$ -effect, the wave travels in one direction with the coast to the right in the north hemisphere. On the contrary, when the water depth decreases with distance perpendicular to the coastline, the opposite conclusion holds true.
6. Either the variable Coriolis' parameter and non-westward and non-eastward oriented coastline or the bottom friction could make the wave amplitude changeable with time. Actually whatever the coastline orientation is, the wave amplitude will almost be attenuated by the bottom friction coefficient.
7. The ratio of the wave frequency  $(\omega_r)_2$  to  $f_0$  decreases gradually with increasing non-dimensional wave number  $lL_s$ . This trend is independent of the variation of coastline orientation and shelf width. However, the regularity that the ratio of wave frequency  $(\omega_r)_2$  to  $f_0$  decreases with increasing  $lL_s$  is merely valid within certain range of wave number. Both phase and group velocities change signs beyond certain wave number bounds.
8. With the exception of coastline which lies westward or eastward, the correction of variable Coriolis' parameter to the wave frequency  $(\omega_r)_2$  becomes increasingly important especially for the shelf width somewhat less than 200 km.
9. The constrains for the existing waves can be derived in very possible case.