

二维长波方程的一个无条件稳定 有限差分格式*

周 朦 方国洪

(中国科学院海洋研究所, 青岛)

摘要 本文对二维长波方程采用劈分子法给出了一个无条件稳定的有限差分格式。将此格式运用于求解矩形等深海湾的潮波, 得到与解析解一致的结果; 运用于北部湾全日潮和半日潮的计算, 结果与实测一致。

在物理海洋学研究中, 人们经常需要直接求解二维长波方程。本文采用劈分子法 (Splitting-up) 给出一个有限差分格式。此格式具有二阶精度、无条件稳定、计算量少等优点。我们还对矩形海湾潮汐潮流和北部湾潮汐潮流做了数值模拟。

一、问题的提出和差分方程的建立

我们研究如下二维长波方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{C_D}{h + \zeta} |u|u - fv + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ = g \frac{\partial \zeta_c}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{\tau_{xx}}{h + \zeta} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{C_D}{h + \zeta} |u|v + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ = g \frac{\partial \zeta_c}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} + \frac{\tau_{yy}}{h + \zeta} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(h + \zeta)v] = 0 \quad (3)$$

$$n_x u + n_y v |_{\text{固壁}} = 0 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} n_x u + n_y v |_{\text{开边界1}} &= \varphi_1 \\ \zeta |_{\text{开边界2}} &= \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 u, v 为 x, y 方向的垂直平均流速分量; ζ 是水位; f 为科氏参数; h 为水深; ζ_c 是平衡潮高度; p_a 为海面大气压; τ_{xx}, τ_{yy} 是水表面风应力; C_D 是海底拖曳系数; φ_1, φ_2 为已知函数; n_x, n_y 为边界外法线单位向量的 x, y 分量。

(1)–(5)式构成了一般长波运动的定解问题。这种运动包括潮波、风暴潮、海流等等。

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第1327号。
收稿日期: 1986年5月20日。

由于(1)–(5)式的复杂性,对其求解计算量往往是很大的。人们希望能得到一个精度高,稳定性好,计算量少的数值模型。Leendertse (1967)^[3]给出的 ADI 方法就具备了上述的要求。本文用劈分子法给出一差分格式。

为了运算方便,我们记

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_D}{h + \zeta} |u| & \frac{\partial u}{\partial y} - f & g \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + f & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{C_D}{h + \zeta} |u| & g \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta) \cdot] & \frac{\partial}{\partial y} [(h + \zeta) \cdot] & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$F = \begin{pmatrix} g \frac{\partial \zeta_c}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{\tau_{xs}}{h + \zeta} \\ g \frac{\partial \zeta_c}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial y} + \frac{\tau_{ys}}{h + \zeta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

则方程(1)–(3)式可简记为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = F \quad (9)$$

记

$$A_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_D}{h + \zeta} |u| & \frac{\partial u}{\partial y} & g \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{C_D}{h + \zeta} |u| & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta) \cdot] & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & g \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} [(h + \zeta) \cdot] & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

则

$$A = A_x + A_y$$

我们采用 Crank-Nicholson 格式, (9)式可近似为

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} + A^n \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} = F^n \quad (12)$$

或

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A^n\right) \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} + A^n \varphi^n = F^n \quad (13)$$

其中 E 是单位算子。

由式 (13), 我们可作近似

$$\begin{aligned} E + \frac{\tau}{2} A^n &\approx E + \frac{\tau}{2} A_x^n + \frac{\tau}{2} A_y^n + \frac{\tau^2}{4} A_y^n A_x^n \\ &= \left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n\right) \end{aligned} \quad (14)$$

将上式代入 (13) 式, 得 (9) 式的一个差分表达式

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n\right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n\right) \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} + A^n \varphi^n = F^n \quad (15)$$

我们知道 Crank-Nicholson 格式是二阶精度, 在式 (14) 的近似中也是二阶近似, 所以式 (15) 是式 (9) 的二阶精度的差分格式。如令

$$\begin{aligned} \varphi^{n+\frac{1}{2}} &= \left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n\right) \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} \\ \varphi^{n+\frac{2}{3}} &= \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} \end{aligned}$$

则 (15) 式可改写为

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n\right) \varphi^{n+\frac{1}{2}} = F^n - A^n \varphi^n \quad (16)$$

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n\right) \varphi^{n+\frac{2}{3}} = \varphi^{n+\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \tau \varphi^{n+\frac{2}{3}} \quad (18)$$

(16), (17) 两式分别是沿 y 方向和沿 x 方向的二个常微分方程。这给方程求解带来很大的方便。下面我们将证明 (16)–(18) 式组成的差分方程组是无条件稳定的, 还将给出由于近似所增加的附加边界条件。

二、稳定性证明

这里我们讨论的稳定性是在无强迫力、无边界扰动的前提下, 方程组 (16)–(18) 关于初值问题的稳定性。(16)–(18) 式由于采用近似式 (14), 升高了微分的阶数, 所以必须在增加附加边界条件后, 才存在唯一解。下面我们将专门讨论如何给出附加条件。在这里, 我们先假定给出了合适的附加边界条件。不失一般性, 我们在一矩形域 $Q = [0, a] \times [0, b]$ 中讨论问题。我们定义函数空间

$$\begin{aligned} C^2 &= \{(u, v, \zeta)^T | u, v, \zeta \text{ 二阶连续可微, 有界,} \\ &u|_{x=0} = u|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0, (x, y) \in Q\} \end{aligned}$$

我们可以把问题归结为下述初值问题的稳定性

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n\right) \varphi^{n+\frac{1}{2}} = -A^n \varphi^n \quad (19)$$

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n\right) \varphi^{n+\frac{2}{3}} = \varphi^{n+\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \varphi^{n+1} = \varphi^n + \tau \varphi^{n+\frac{1}{2}} \\ \varphi^0 = f \\ \varphi^{n+\frac{1}{2}}, \varphi^{n+\frac{3}{2}}, \varphi^n, f \in c^2 \end{cases} \quad (21)$$

在上列诸式中, $n = 1, 2, \dots$; A^n, A_x^n, A_y^n 是 u^n, v^n, ζ^n 的算子。我们定义 c^2 上的点积: 取 $\varphi^n = (u^n, v^n, \zeta^n)^T \in c^2$, 则任意 $\psi_1 = (u_1, v_1, \zeta_1)^T$ 和 $\psi_2 = (u_2, v_2, \zeta_2)^T \in c^2$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \iint_D \{ (h + \zeta^n)(u_1 u_2 + v_1 v_2) + g \zeta_1 \zeta_2 \} dA \quad (22)$$

对任意 $\varphi^{n+1} = (u^{n+1}, v^{n+1}, \zeta^{n+1})^T \in c^2$

$$\begin{aligned} \langle A^n \varphi^{n+1}, \varphi^{n+1} \rangle &= \iint_D \left\{ (h + \zeta^n) \left[\left(u^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial x} + u^{n+1} \frac{C_D}{h + \zeta^n} |\mathbf{u}^n| \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + v^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial y} - v^{n+1} f + g \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} \right) u^{n+1} + \left(u^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u^{n+1} f + v^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial y} + v^{n+1} \frac{C_D}{h + \zeta^n} |\mathbf{u}^n| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial y} \right) v^{n+1} \right] + g \nabla \cdot [(h + \zeta^n) \mathbf{u}^{n+1}] \zeta^{n+1} \} dA \\ &= \iint_D \{ C_D |\mathbf{u}^n| (u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 + (h + \zeta^n) \\ &\quad \times (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \} dA \end{aligned} \quad (23)$$

如果略去对流项, 由上式可知 A^n 算子是半正定的。同样对算子 A_x^n, A_y^n 有

$$\langle A_x^n \varphi^{n+1}, \varphi^{n+1} \rangle = \langle A^n \varphi^{n+1}, \varphi^{n+1} \rangle \quad (24)$$

$$\langle A_y^n \varphi^{n+1}, \varphi^{n+1} \rangle = 0 \quad (25)$$

A_y^n 是半正定的, A_x^n 满足半正定的条件同 A_n 。

(19)–(21) 式等价于

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n \right) \left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n \right) \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} = -A^n \varphi^n \quad (26)$$

则

$$\varphi^{n+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n \right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n \right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2} A_y^n \right) \left(E - \frac{\tau}{2} A_x^n \right) \varphi^n \quad (27)$$

由泛函分析 (Marchuk 1982)^[4] 可知, 若 A_x^n, A_y^n 是半正定的, 则有

$$\left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n \right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n \right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2} A_y^n \right) \left(E - \frac{\tau}{2} A_x^n \right) \right\| \leq 1 \quad (28)$$

这样可有

$$\|\varphi^{n+1}\| \leq \|\varphi^n\| \quad (29)$$

这表明此格式是无条件稳定的。量 $\|\varphi^n\|^2$ 在物理意义上对应于总机械能。因而不等式 (29) 意味着在没有外界能量输入时域内的总能量是不会增加的。

三、方程的附加边界条件

我们记 (13) 式的解为 $\varphi_{\star}^{n+1} = (u_{\star}^{n+1}, v_{\star}^{n+1}, \zeta_{\star}^{n+1})^T$ 。则由 (16)–(18) 式可得

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^{n+1}\|^2 = & -\frac{\tau}{2} \{ \langle \varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{2}{3}}, A_x^n(\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{2}{3}}) \rangle \\ & + \langle \varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{1}{3}}, A_y^n(\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{1}{3}}) \rangle \} \\ & + \frac{\tau^4}{4} \left\langle A_x^n \varphi^{n+\frac{2}{3}}, A_y^n \left(\frac{1}{2} A^n(\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n) - \varphi^{n+\frac{1}{3}} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

略去 $O(\tau^4)$ 高阶小量, 则有

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^{n+1}\|^2 = & -\frac{\tau}{2} \{ \langle \varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{2}{3}}, A_x^n(\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{2}{3}}) \rangle \\ & + \langle \varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{1}{3}}, A_y^n(\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^n - \tau\varphi^{n+\frac{1}{3}}) \rangle \} \quad (30) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^{n+1}\|^2 = & -\frac{\tau}{2} \iint_D \left\{ (h + \zeta^n) \left[(u_{\star}^{n+1} - u^n - \tau u^{n+2/3})^2 \frac{\partial u^n}{\partial x} \right. \right. \\ & + (u_{\star}^{n+1} - u^n - \tau u^{n+2/3})(v_{\star}^{n+1} - v^n - \tau v^{n+2/3}) \\ & \times \left(\frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{\partial v^n}{\partial x} \right) + (v_{\star}^{n+1} - v^n - \tau v^{n+2/3})^2 \frac{\partial v^n}{\partial y} \\ & + (u_{\star}^{n+1} - u^n - \tau u^{n+2/3})^2 + (v_{\star}^{n+1} - v^n - \tau v^{n+2/3})^2 \\ & \times c_d |\mathbf{u}^n| \left. \right\} dA - \frac{g\tau}{2} \oint_{\partial\Omega} \{ n_x (h + \zeta^n) (u_{\star}^{n+1} - u^n \\ & - \tau u^{n+2/3})(\zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+2/3}) + n_y (h + \zeta^n) \\ & \times (v_{\star}^{n+1} - v^n - \tau v^{n+1/3})(\zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+1/3}) \} dl \quad (31) \end{aligned}$$

如果忽略对流项, 或认为对流项比摩擦项小一个量级, 则一定有

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\star}^{n+1} - \varphi^{n+1}\|^2 \leq & -\frac{\tau}{2} g \oint_{\partial\Omega} \{ n_x (h + \zeta^n) (u_{\star}^{n+1} - u^n - \tau u^{n+\frac{2}{3}}) \\ & \times (\zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+\frac{2}{3}}) + n_y (h + \zeta^n) \\ & \times (v_{\star}^{n+1} - v^n - \tau v^{n+\frac{1}{3}}) (\zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+\frac{1}{3}}) \} dl \quad (32) \end{aligned}$$

我们得

$$\begin{cases} n_x (u_{\star}^{n+1} - u^n - \tau u^{n+\frac{2}{3}}) |_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{或 } \zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+\frac{2}{3}} |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} n_y (v_{\star}^{n+1} - v^n - \tau v^{n+\frac{1}{3}}) |_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{或 } \zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+\frac{1}{3}} |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

得定解方程组

$$\begin{cases} \left(E + \frac{\tau}{2} A_y^n \right) \varphi^{n+\frac{1}{3}} = -A^n \varphi^n + F^n \\ n_y (v_{\star}^{n+1} - v^n - \tau v^{n+\frac{1}{3}}) |_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{或 } \zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+\frac{1}{3}} |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} \left(E + \frac{\tau}{2} A_x^n \right) \varphi^{n+\frac{2}{3}} = \varphi^{n+\frac{1}{3}} \\ n_x (u_{\star}^{n+1} - u^n - \tau u^{n+\frac{2}{3}}) |_{\partial\Omega} = 0 \\ \text{或 } \zeta_{\star}^{n+1} - \zeta^n - \tau \zeta^{n+\frac{2}{3}} |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \tau \varphi^{n+\frac{1}{2}} \quad (37)$$

上式中 $u_{\star}^{n+1}|_{\partial\Omega}, v_{\star}^{n+1}|_{\partial\Omega}, \zeta_{\star}^{n+1}|_{\partial\Omega}$ 为边界上已知函数。(35),(36)和(37)式即为 y, x 方向的两组常微分方程组的边值问题。我们可采用多种不同的方法求解,如差分方法,有限元方法,格林函数方法。但为保持差分方程的稳定性,我们要求 A_x^n, A_y^n 和 A^n 在空间离散化后的近似算子 $\tilde{A}_x^n, \tilde{A}_y^n$ 和 \tilde{A}^n 仍保持半正定的性质。

四、算 例

我们仍采用差分方法求解(36)和(37)式。采用多错网格,分别形成 y, x 方向的三对角矩阵,然后可用追赶法求解。这里采用一般网格(见图1),并将(35)和(36)式分别化为 $v^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $u^{n+\frac{1}{2}}$ 的二阶常微分方程。采用中心差分,我们仍得 y, x 方向的三对角矩阵。初始条件取 $u = v = \zeta = 0$ 。

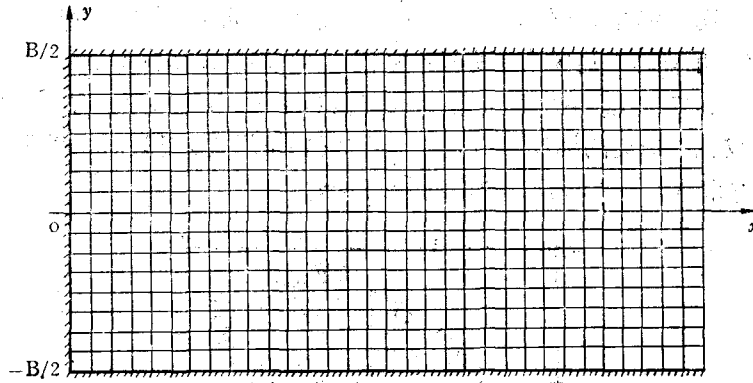


图1 矩形域的网格划分

Fig. 1 Computational grid for a rectangular gulf

算例1 Taylor 问题

考虑一个矩形域(图1)的潮汐问题,取无量纲方程^[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{|u|}{h + \zeta} u - sv + l^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{|v|}{h + \zeta} v + su + l^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \lambda \zeta)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(1 + \lambda \zeta)v] = 0 \quad (40)$$

式中 s, l, μ, λ 为无量纲系数,其定义分别为

$$s = \frac{f}{\sigma}, \quad l = \frac{\pi \sqrt{gh}}{B\sigma}, \quad \mu = \frac{C_D \sqrt{gh}}{h\sigma}, \quad \lambda = \frac{\pi U}{B\sigma}$$

在计算中我们取 $s = 0.814, l = 1.162, \mu = 0.4, \lambda = 0.05$ 。我们考虑在湾口处有一半日潮波的输入[开口边界潮汐数据取自方国洪和王仁树(1966)给出的解析解]。其计算结果同方国洪等的解析解相同(见图2,3)。

为了检验此格式的稳定性,我们把时间步长取到了超过 Courant-Lewy-Friedrichs 条

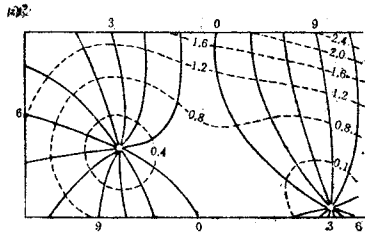


图2 同潮时线(实线)与等振幅线(虚线)
Fig. 2 Co-tidal lines (solid) and
co-amplitude lines (dashed)

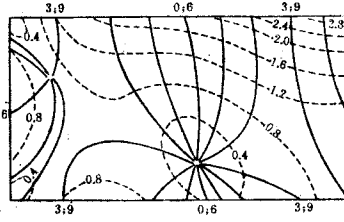


图3 同潮流时线(实线)与等最大流速线(虚线)
Fig. 3 Time (solid) and speed (dashed) of the
major semi-axis of tidal current ellipses

件的5至6倍,计算仍然稳定,结果相当满意。

算例2 北部湾的潮汐和潮流

郑文振、方国洪等在1964和1965年最早对北部湾的潮汐和潮流进行了系统的研究^[2]。近年来,虽有若干篇关于南海潮汐数值计算的文章,但这些文章对北部湾的潮汐和潮流未进行过详细讨论。在这里,我们取方程(1)–(3),忽略所有的外力,即认为湾内潮汐和潮流仅由湾口处的潮汐所引起。同时我们采用文献[2]的方法同时考虑 O_1 和 K_1 以及 M_2 ,并取 $C_D = 0.0012$ 。网格划分见图4。

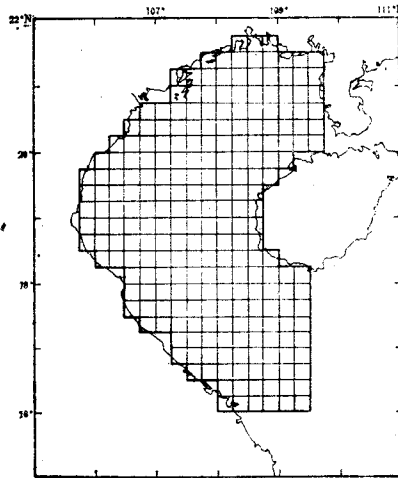


图4 北部湾的计算网格

Fig. 4 Computational grid for the Bay of Beibuwan (the Gulf of Tonkin)

数值计算结果与沿岸潮汐观测数据比较,其振幅偏差不大于10 cm,迟角偏差不大于 10° 。图5和图6为 O_1 和 M_2 的同潮图(K_1 分布与 O_1 相近,这里从略)。图7为 $\frac{1}{2} \times (K_1 + O_1)$ 和 M_2 分潮之和的每隔5小时潮高和潮流场。这些结果表明:北部湾的潮汐和潮流具有全日潮性质; O_1 和 M_2 不存在无潮点;潮流在湾东部较强,西部较弱,在海南岛西海岸最大,且潮流转向较其它地区早1–2小时;潮波为行进波形,在科氏力作用下潮波成逆时针旋转;潮差在湾口较小,越向湾内越大,在广西沿岸可达4 m。

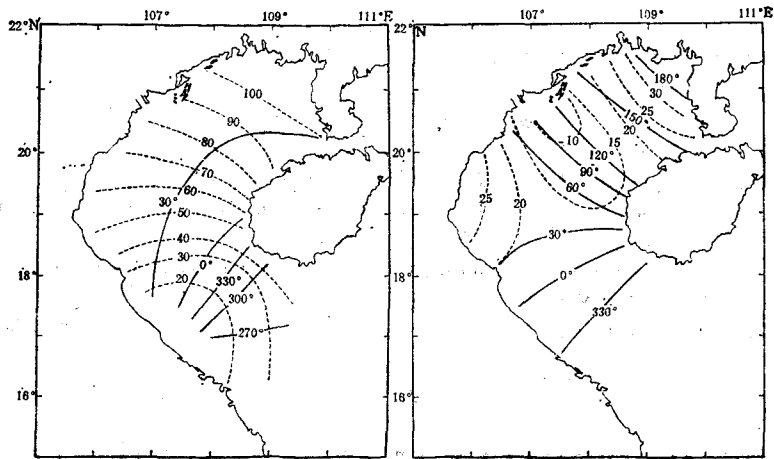


图 5, O_1 同潮图

Fig. 5 O_1 co-tidal chart

图 6 M_2 同潮图

Fig. 6 M_2 co-tidal chart

—等迟角线(以东 8 时为准); ---等振幅线(单位: cm)。

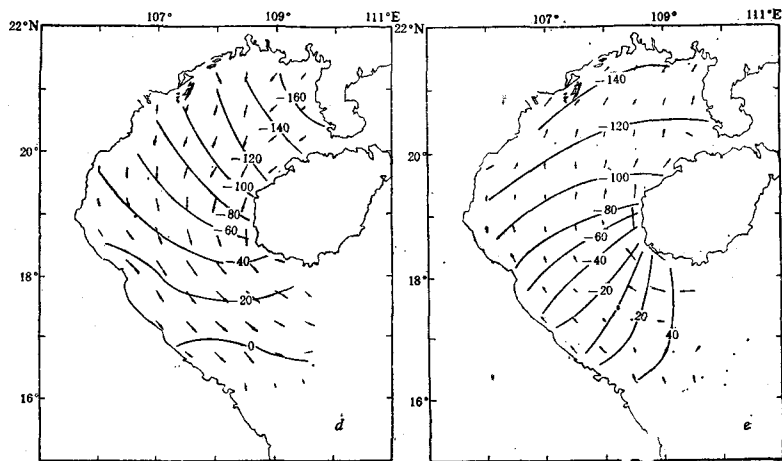
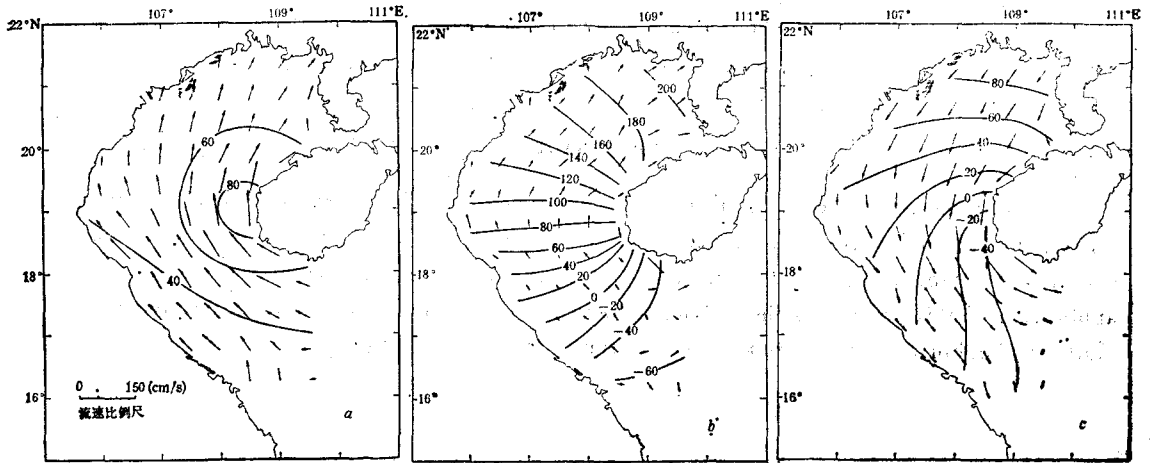


图 7 计算所得不同时刻的潮高(单位: cm) 和潮流流速(单位: cm/s) 分布

Fig. 7 Computed tidal height (cm) and tidal current speed (cm/s)

a. $t=0h$; b. $t=4h$; c. $t=9h$; d. $t=14h$; e. $t=19h$.

参 考 文 献

- [1] 方国洪、王仁树, 1966。海湾的潮汐与潮流。海洋与湖沼 8(1): 60—77。
- [2] Fang, G. H., 1986. Tide and tidal current charts for the marginal seas adjacent to China. *Chinese Journal of Oceanology and Limnology* 4(1): 1—16.
- [3] Leendertse, J. J., 1976. Aspects of a Computational Model for Long-Period Water-Wave Propagation RM-5294-PR. Rand Corp., Santa Monica.
- [4] Marchuk, G. I., 1982. *Methods of Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 501pp.

AN UNCONDITIONALLY STABLE FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL LONG-WAVE EQUATIONS*

Zhou Meng and Fang Guohong

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao*)

ABSTRACT

The splitting-up method is applied to the two-dimensional long-wave equations to give an unconditionally stable finite-difference scheme. The solution with this scheme for the tide in a uniform rectangular gulf is obtained and is consistent with the analytical solution. The application of this scheme to the diurnal and semidiurnal tides in the Bay of Beibuwan (the Gulf of Tonkin) gives the results in agreement to the observations.

* Contribution No. 1327 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.