

湖水总磷浓度的数学模拟*

顾丁锡 舒金华

(中国科学院南京地理与湖泊研究所)

提要 本文针对现行湖水总磷模型中的存在问题,探讨了均匀混合和非均匀混合两类湖泊总磷模型的建立方法。验算结果表明,不仅模型的计算精度能符合水质规划的要求,而且还较好地解决了大型浅水湖泊中总磷浓度分布的时空差异问题。

70年代后期,联合国经济合作与开发组织(简称 OECD)为防止湖泊富营养化,提出了湖水总磷浓度的计算模型,这对规划和管理湖泊环境,防止湖泊富营养化程度的发展起到了重要作用。

OECD 计算湖水磷浓度的方法,是根据加拿大 Vollenweider 于1975年提出的大湖湖水中总磷浓度的模型方程^[3]进行计算的,即:

$$V \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = I_p - q \cdot P - \alpha \cdot V \cdot P \quad (1)$$

式中, P 为湖水的平均总磷浓度 (mg/L); I_p 为湖泊内从各种途径输入的数量 (g/a); q 为通过各出湖河道流走水量 (m^3/a); V 为湖泊容积 (m^3); α 为总磷的沉降系数 ($1/\text{a}$); t 为计算时段 (a)。

取这一方程的稳态解,并寻找模型参数与湖泊水文条件的相互关系。各学者提出了不同的湖水总磷浓度的数学模型,见表1。

表1 不同学者计算湖水中总磷浓度的水质模型^[3]

Tab. 1 Water quality models for calculating total P by different

作者	总磷水质模型	注 释
Vollenweider	$\bar{P} = \bar{P}_i [1 + \sqrt{\bar{Z}/q_s}]^{-1}$	\bar{P} : 湖水平均总磷浓度 (mg/L) \bar{P}_i : 入湖河道总磷浓度 (mg/L)
Dillon	$\bar{P} = \frac{L_p(1 - R_p)}{\rho_w \cdot \bar{Z}}$	\bar{Z} : 湖泊平均水深 (m) q_s : 单位湖面上的水量负荷 ($\text{T}/\text{m}^2 \cdot \text{a}$) L_p : 总磷的负荷量 ($\text{g}/\text{m}^2 \cdot \text{a}$)
“浅水湖和水库”规划组	$P = \bar{P}_i(1 + 2.27\tau_w^{0.586})^{-1}$	τ_w : 湖水滞留时间 (a) R_p : 总磷的滞留系数 (%)
合田·健	$\bar{P}_i = \frac{L_p}{\bar{Z} \left(\frac{q}{V} + \frac{10}{\bar{Z}} \right)}$	ρ_w : 水力冲刷系数 ($1/\text{a}$) q : 入湖水量 (m^3/a) V : 为湖泊容积 (m^3/a)

表1所列的数学模型主要缺点是:

* 本文在流场计算中曾得到赵士清等同志帮助,谨致谢意。
收稿日期: 1986年6月2日。

(1) 模型未与湖水前期浓度相联系,这对换水速度缓慢而总磷来源发生重大变化时的湖泊,会产生较大的误差。

(2) 模型只能求得均匀混合型湖泊总磷的平均浓度,而无法反映大型湖泊污水入湖后,总磷浓度分布的时空差异。

一、方法的探讨

为了克服上述总磷浓度计算中的缺点,根据入湖污水与湖水的混合状况,将湖泊分为均匀混合型湖泊和非均匀混合型湖泊两类,分别讨论总磷浓度模型的制作方法^[1,2,4]。

(一) 均匀混合型湖泊总磷的水质模型

1. 模型方程

仍以 Vollenweider 方程,即(1)式进行讨论。

2. 方程的求解

为了使模型与湖水的前期浓度相联系,在(1)式积分时,代入 $t = 0, P = P_0$ 的起始条件,即得湖水总磷平均浓度的不稳态解:

$$P = \frac{I_p}{(\rho_w + \alpha) \cdot V} - \left[\frac{I_p}{(\rho_w + \alpha) \cdot V} - P_0 \right] e^{-(\rho_w + \alpha)t} \quad (2)$$

式中, P_0 为计算开始时刻的湖水平均的总磷浓度 (mg/L); t 为从开始时刻到计算时刻的时段长度 (a); 其余符号同表 1。

显然,当污水入湖时间很长,且湖水换水速度很快时,式(2)右边第二项为零,即为(1)式的稳态解。

3. 参数识别方法

式(2)中参数的识别可通过以下途径进行:

(1) 水力冲刷系数 ρ_w ($\rho_w = \frac{q}{V}$) 为出湖水量与湖泊容积之比,由湖泊年水量平衡表中求出。

(2) 沉降系数 α , 由某一时段内湖泊总磷的收支平衡关系中反推求得。

(二) 非均匀混合型湖泊磷浓度的水质模型

总磷进入湖后,在湖流的搬运下,不断沿流速方向进行平流输送,同时又不断向四周低浓度的方向扩散,并伴随着发生一系列的化学和生物作用,使浓度逐步降低。湖水的这一自净现象是总磷产生时空变化的主要原因。描述这一过程乃是湖水的运动方程和稀释自净方程。对于大型浅水湖泊,这些二维模型方程求解方法如下。

1. 坐标系统的设置

取 x, y 为水平方向, H 自湖底垂直向上,如图 1 所示。

2. 流场的模型方程

(1) 运动方程

根据湖水流动时的受力情况,湖水的运动方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{\rho H} (\tau_x^a - \tau_x^b) \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{\rho H} (\tau_y^a - \tau_y^b) \quad (4)$$

(2) 连续方程

根据水量平衡原理, 得出的水量连续方程为:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(H \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(H \cdot v)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

(3) 浓度场方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & E_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - u \frac{\partial P}{\partial x} \\ & - v \frac{\partial P}{\partial y} - \alpha \cdot P \end{aligned} \quad (6)$$

式中, ξ 表示水位, 即水面到平均水面的距离 (m); H 表示水深, 即湖底到平均水面的距离 (m); u, v 分别表示 x 方向和 y 方向上的垂线平均流速 (m/s); t 表示时间

$f = 2\omega \sin \phi$ [f 称柯氏系数; ω 为地球自转角速度; ϕ 是湖泊所在的纬度 (度)]; g 为重力加速度 (m/s²); τ_x^a, τ_x^b 分别表示 x 方向, 风对湖面摩擦力和湖水对湖底的摩擦力; τ_y^a, τ_y^b 分别表示 y 方向, 风对湖面摩擦力和湖水对湖底的摩擦力。

这些力的大小, 通常以经验公式表示为:

$$\tau_x^a = \rho_a \cdot r_a \cdot w^2 \cos B;$$

$$\tau_y^a = \rho_a \cdot r_a \cdot w^2 \sin B;$$

$$\tau_x^b = \frac{\rho g}{C^2} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot u;$$

$$\tau_y^b = \frac{\rho g}{C^2} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot v。$$

式中, ρ_a 和 ρ 为空气和水的密度 (g/m³); r_a 为风对湖面的摩擦力系数, 文献报道一般 $r_a = 2.56 \times 10^{-3}$; w 为湖面上空 10 m 处的风速 (m/s); B 为风向与 x 轴的夹角 (度); C 为湖水的谢才系数, $C = \frac{1}{n} H^{\frac{1}{6}}$ [H 为水深 (m), $H = \xi + h$; n 为湖底底质的糙度]; E_x, E_y 为湖水在 x, y 方向上的紊动扩散系数 (m²/s); α 为总磷的沉降系数 (1/s); 其余符号同表 1。

3. 方程的解法

首先将以上方程, 以差分形式进行离散。

(1) 差分网格的设置

为了便于计算, 通常取 $\Delta x = \Delta y$, 当考虑计算的稳定性应满足: $\frac{\partial H \cdot \Delta t}{\Delta^2 S} \leq 1。$

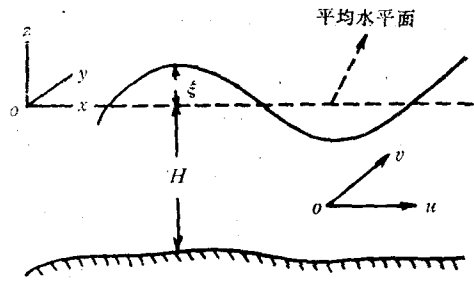


图 1 坐标系定义

Fig. 1 Definition of the coordinate system

而各要素的设置, 见图 2。以 × 表示 ξ, P, h 的位置; — 表示 u 的位置; | 表示 v 的位置。

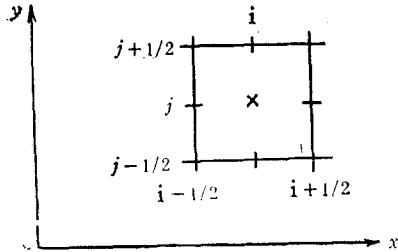


图 2 网格的设置

Fig. 2 Location of differential grids

为了简化后面的差分表达式, 引进一些记号:

$$F_{i,j}^k = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t), \text{ (取 } \Delta x = \Delta y = \Delta t \text{);}$$

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^x = (F_{i,j} + F_{i+1,j})/2;$$

$$\bar{F}_{i,j+\frac{1}{2}}^y = (F_{i,j} + F_{i,j+1})/2;$$

$$F_x = F_{i,j} - F_{i,j-1}, \text{ 在 } \left(i - \frac{1}{2}, j\right);$$

$$F_y = F_{i,j} - F_{i,j-1}, \text{ 在 } \left(i, j - \frac{1}{2}\right);$$

$$\bar{\bar{F}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (F_{i,j} + F_{i+1,j} + F_{i+1,j+1})/4。$$

(2) 方程的差分表达

鉴于显式求解的稳定性差, 隐式求解的时间太长, 故采用既无条件稳定的计算, 又相对简单的交替方向法进行求解, 为了使差分方程保持线性, 在求解时对流项 $u \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial v}{\partial y}$ 等项中, u, v 与 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 等不能都采用高时位上的值。

这样从 $k\Delta t \rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t$, 式(3)表达为:

$$u^{k+\frac{1}{2}} = u^k + \frac{1}{2} \Delta t f \bar{v}^k - \frac{1}{2} \Delta t u^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^k - \frac{1}{2} \Delta t \bar{v}^k \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^k - \frac{\Delta t}{2\Delta_x} g \xi_x^{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta t g u^k \frac{\sqrt{(u^k)^2 + (\bar{v}^k)^2}}{(\xi^k + \bar{h}^x)^k (\bar{C})^2} + \frac{C_a \cdot \omega^2 \cos B}{(\xi^x + \bar{h})^k} \quad (7)$$

在 $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$ 上;

式(5)表达为:

$$\xi^{k+\frac{1}{2}} = \xi^k - \frac{\Delta t}{2\Delta_x} [(\xi + \bar{h}^x)^k u^{k+\frac{1}{2}}] - \frac{\Delta t}{2\Delta_x} [(\xi^y + \bar{h}^y) \cdot v]^k \quad (8)$$

在 (i, j) 上;

式(4)表达为:

$$v^{k+\frac{1}{2}} = v^k - \frac{1}{2} \Delta t f \bar{u}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta t \bar{u}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^k - \frac{1}{2} \Delta t v^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^k - \frac{\Delta t}{2\Delta_y} g \xi_y^k - \frac{1}{2} \Delta t g v^{k+\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(\bar{u}^{k+\frac{1}{2}})^2 + (v^k)^2}}{(\xi^y + \bar{h}^y)^{k+\frac{1}{2}} (\bar{C})^2} + \frac{C_a \cdot \omega^2 \sin B}{(\xi^y + \bar{h}^y)^{k+\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

在 $\left(i, j + \frac{1}{2}\right)$ 上;

式中,

$$C_a = \frac{\rho_a \cdot r_a}{\rho}$$

同样可写出 $\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t \rightarrow (k+1)\Delta t$ 的各项表示, 而(6)式的差分形式为:

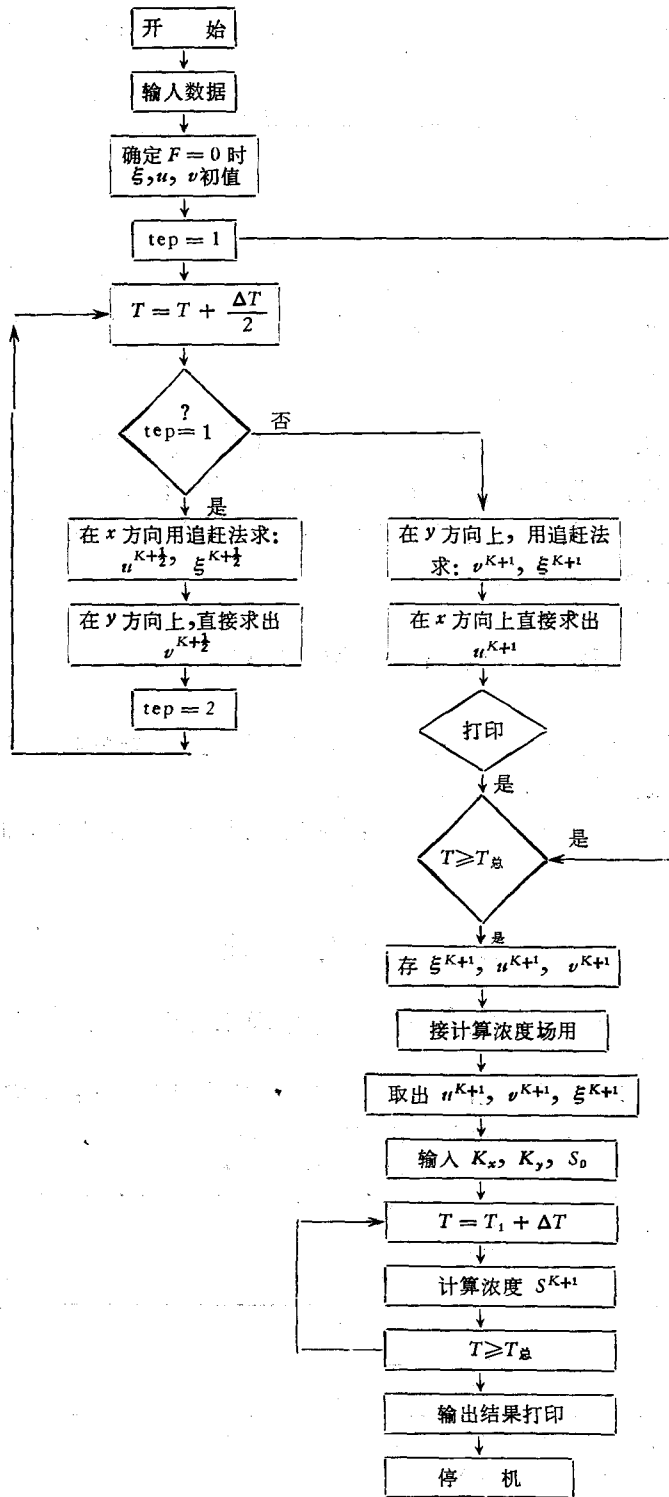


图 3 计算框图

Fig. 3 Calculation frame

$$P^{K+1} = P^K + \frac{\Delta t}{2} \left[E_x \frac{P_{i-1,j}^K - 2P_{i,j}^K + P_{i+1,j}^K}{\Delta_x \cdot \Delta_y} + E_y \frac{P_{i,j-1}^K - 2P_{i,j}^K + P_{i,j+1}^K}{\Delta_x \cdot \Delta_y} - u^K \frac{P_{i,j}^K - P_{i-1,j}^K}{\Delta_x} - v^K \frac{P_{i,j}^K - P_{i,j-1}^K}{\Delta_y} - \alpha_{i,j} P_{i,j}^K \right] \quad (10)$$

在 (i, j) 上。

(3) 求解的边界条件。

边界可分两类,一类与陆地和岛屿相连,称为闭边界;另一类是与出入河道相通的称开边界。对于闭边界取:法向流速为 0,浓度的梯度为 0。对于开边界取:水位、流速和浓度均取边界断面上的实测值。

(4) 求解的基本资料

A 图件: a. 湖泊平面图; b. 湖底高程图; c. 湖泊测流点和水质采样点分布图。

B 资料: a. 水位,沿湖各水位站测流期间的日平均水位; b. 测流,各种不同类型的湖流观测值,包括重力流、风生流等,各主要入湖河口和出湖河口的径流量; c. 风速,测流期间沿湖各气象站的风速和风向。

(5) 求解的计算机程序

从 K 时刻求 $K+1$ 时刻,各项值的计算框图如图 3 所示。

(6) 参数的识别

A. 紊动扩散系数 E_x, E_y 可根据既不解,又不降解的溶解性物质(例如总矿化度)同步测得的流场和浓度场资料,通过公式反推求出。

B. 沉降系数 α : 在求得流场分布和 E_x, E_y 值后,根据总磷实测的湖面分布,通过公式反推求出。

二、模型的验证

(一) 均匀混合型湖泊的总磷浓度的验证

西湖为杭州市近郊的风景游览湖泊,70 年代水质监测结果表明,该湖富营养化发展

表 2 西湖湖泊的基本特征 (1982 年平均值)

Tab. 2 Basic features of West lake in 1982

形态特征	平均水深 (m)	1.55
	湖泊面积 (km ²)	5.66
	湖泊容积 (10 ⁶ m ³)	8.773
入湖水量	各种地表径流 (10 ⁶ m ³)	8.412
	湖面降水 (10 ⁶ m ³)	7.901
	外水系引水 (10 ⁶ m ³)	9.30
出湖水量	疏浚 (10 ⁶ m ³)	1.381
	闸门泄水 (10 ⁶ m ³)	17.790
	捕鱼 (10 ⁶ m ³)	0.410
	水面蒸发 (10 ⁶ m ³)	6.290
湖泊水力冲刷系数 $\rho_w(y)$		1.49

的速度是快的。为了控制和减轻湖水中总磷的浓度, 1982 年度对沿湖排污管进行了截污, 下面试验算截污后的湖水总磷浓度。

1. 验证资料的收集 (见表 2—4)。

表 3 1982 年西湖湖水总磷来源滞留系数 (总磷量 T/a)

Tab. 3 Retention coefficients of total P in West Lake

收入项	地表径流	1.57
	湖面降水	0.20
	外水系引水	0.20
支出项	疏浚	0.03
	闸门泄水	1.78
磷的滞留系数 $R = 1 - \frac{\text{总磷年输出量}}{\text{总磷年输入量}}$		0.08
磷的沉降系数 α		0.53

表 4 西湖历年总磷浓度监测值

Tab. 4 Monitoring values of total P from 1981—1983

年 份	1981	1982	1983
湖水总磷浓度 (mg/L)	0.13	0.11	0.11

2. 验证结果

取 $t = 1$ 年, 将以上数据代入(2)式, 由表 5 得 1982 年湖泊总磷浓度的预测值。

表 5 均匀混合型模型的验证

Tab. 5 Model verification in uniformly-mixed lakes

作 者	本 文	Vollenweider	Dillon	“湖泊与水库” 规划组	合田·健	实测值
浓度 (mg/L)	0.105	0.26	0.09	0.04	0.03	0.11
相对误差 (%)	-4.5	+136	-18.1	-64.0	73.0	—

可见考虑了湖水前期浓度 (1981 年) 的影响, 在污染源发生重大变化时, 预测 (1982 年) 精度将有明显的提高。

(二) 非均匀混合型湖泊总磷浓度模型的验证

1. 验证资料

1983 年 8 月 6 日测得的江西鄱阳湖九条主要入湖河道的水位, 及其总磷浓度如表 6 所示, 下面以流场和浓度场模型进行湖面总磷浓度分布的验证。

2. 验算结果

(1) 流场模型的验证

将已知的湖底高程, 入湖河口水位, 已识别的参数 $n = 0.010$ (湖底粗糙率) 等数据输入电算程序, 求得在 10m/s 的东南风持续作用 100 小时后, 湖面的流速分布见图 4。

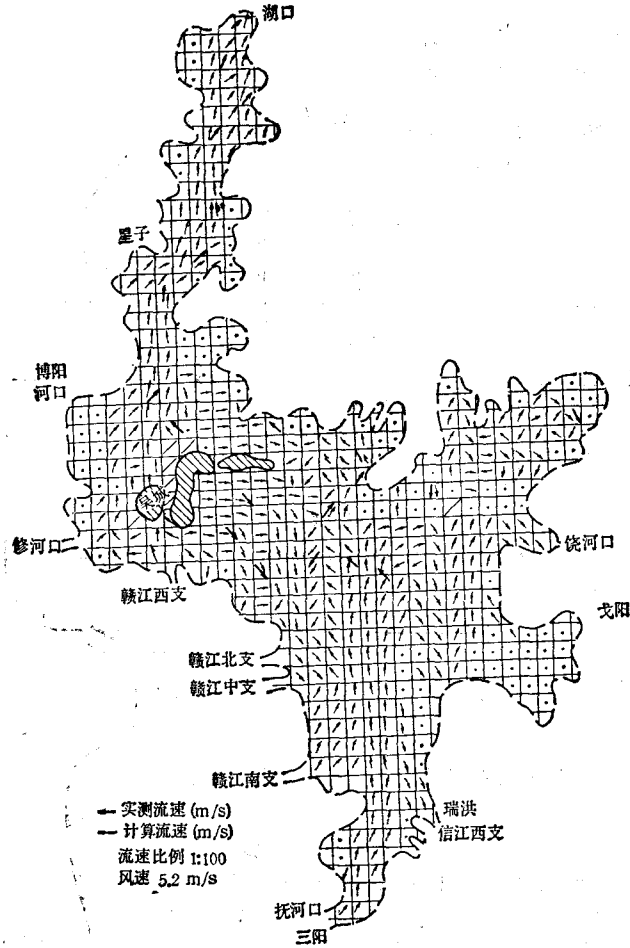


图4 1983年8月16日鄱阳湖在 10 m/s 的东南风持续作用水面
40小时后的流场分布(风向 SSE)

Fig. 4 Distribution of surface current field in Poyang Lake after 40 hours' prevailing south-west wind (windspeed = 10 m/s , Aug. 16, 1983)

表6 入湖河道水位及总磷浓度的实测值

Tab. 6 Observed values of water level and total P concentration in inflowing rivers

入湖河口	抚河口	赣 江				信江口	湖 口	饶河口	修水口	风 情
		南支	中支	西支	北支					
水位(m)	19.90	19.60	19.56	19.60	19.50	18.86	19.14	19.00	19.53	东 南 (10 m/s)
总磷浓度 (mg/L)	0.039	0.043	0.030	0.035	0.030	0.038	0.035	0.035	0.099	

(2) 总磷模型的验证

将已求得的湖面流速分布,各入湖河口总磷浓度和已识别的参数,扩散系数 $E_x = 30 u \cdot H$, $E_y = 22v \cdot H$ 和沉降系数 $W = 8 \times 10^{-6}(1/s)$ 等数据输入电算程序; 求出该流

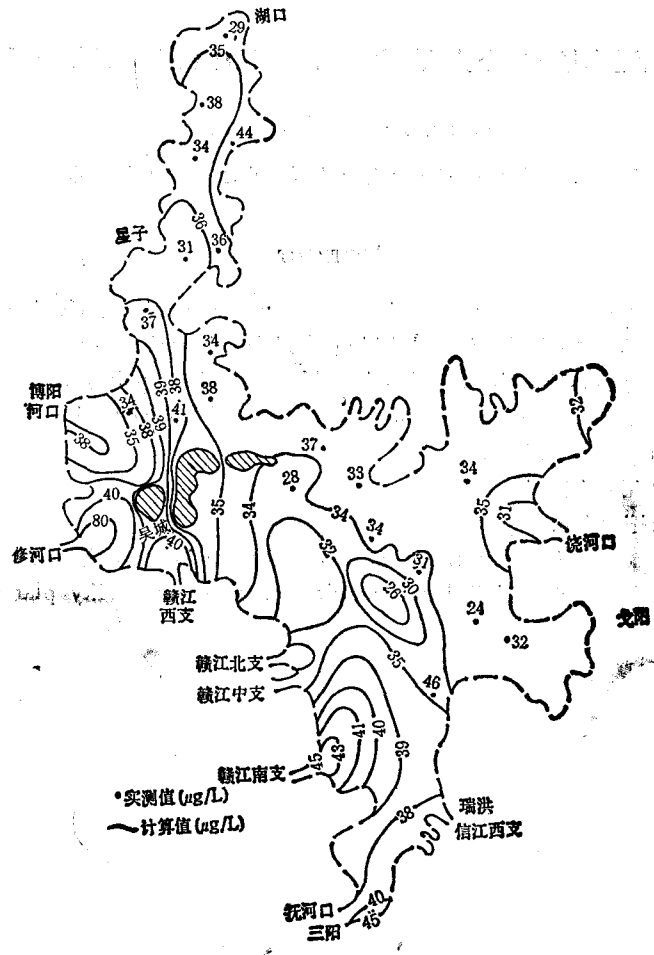


图5 1983年8月16日鄱阳湖在10 m/s的东南风持续作用水面40小时后湖面总磷分布

Fig. 5 Distribution of total P concentration in Poyang Lake after 40 hours prevailing south-west wind (windspeed = 10m/s, Aug. 16, 1983)

场下的总磷的湖面分布,见图5。验算结果表明,总磷浓度的预测值和实测值,不论在数值上,还是在分布趋势上,都取得较好的一致。

参 考 文 献

- [1] 赵士清、张镜潮,1981。连云港潮流的数值模拟 海洋学报 3(3): 501—511。
- [2] 陈时俊、孙文心、王化桐,1982。胶州湾环流和污染扩散的数值模拟。山东海洋学院学报 3(3): 1—8。
- [3] OECD Cooperative Programme for inland waters, 1979. Final report of the project on "shallow lakes and reservoirs". Vol. 1, pp. 10—20.
- [4] Gerald, T. Orlob, 1983. Mathematical Modelling of Water Quality: Streams, Lakes, and Reservoirs. University of California. Davis, pp. 337—363.

ON MODELLING OF TOTAL PHOSPHORUS IN LAKES

Gu Dingxi and Shu Jinhua

(Nanjing Institute of Geography and Limnology, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper discusses some weakness in present water quality modelling of total phosphorus and puts forward a method of establishing models of total phosphorus according to uniformly mixed and non-uniformly mixed lakes. The principle points are as follows:

1. Establishment of equations of current field and concentration models.
2. Solution of the equations.
3. Parameter identification.
4. Model verification.

Some results observed in West Lake and Poyang Lake agree well with the calculated value, so mathematical models satisfied the requirement of water quality planning in lakes.