第 20 卷 第 2 期 海 洋 与 湖 沼 Vol. 20, No. 2
1989 年 3 月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Mar., 1989

深海自然噪声场的空间互功率谱

唐应吾
（中国科学院北海研究站，青岛）

提要 本文从海洋自然噪声场时空相关函数的普遍表达式出发，导出了无吸收情况下自然噪声场的空间互功率谱的一般表达式，并就均匀深海及表层为正声速梯度的深海两种情况进行了计算。结果指出海水非均匀性的影响是很小的。

由于水声信号处理技术的发展，研究和掌握海洋中自然噪声场的空间互功率谱的特性，已成为重要的“应用基础研究”之一。

海洋自然噪声场的时空相关函数（空间互功率谱）的一些积分表示式的建立[1,3,4]，无疑使人们对海洋自然噪声场时空相关特性的认识，从 Cron 和 Sherman[6] 的水平上大大深化了。这些积分表示式不仅局限性小，而且逻辑严谨，概念深刻。

但是，这些海洋自然噪声场时空相关函数的积分表示式只从原理上解决问题。在实际上，应用它们来解决一些具体问题时，还有一些难点需要继续研究。文献[4]已就浅海中自然噪声场的空间互功率谱的计算提出了一种近似方法。本文将研究深海中自然噪声场空间互功率谱的计算问题。这一问题在文献[2]中也作了讨论，但其中有些做法及其结果是值得商榷的。

一、介质无吸收时噪声场的空间互功率谱

假设噪声源是均匀而独立地分布在海水表面附近时，海水中噪声场的时空相关函数，在文献[4]中已求得为

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \int\cdots\int \frac{g^2(\theta)}{4\pi^2} S(\omega) F(z', z_1, k_x, k_y) F^*(z', z_2, k_x, k_y) \\ \times \exp\{i[k_x(x_1 - x') + k_y(y_1 - y') - k'_x(x_2 - x') \\ - k'_y(y - y') + \omega\tau]\} dx'dy'dk_xdk_ydk'_xdk'_yd\omega, \qquad (1)\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 为两个接收点的位置矢径；τ 为 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 之间的时延，$g(\theta)$ 为噪声源总的方向性因子；$S(\omega)$ 为噪声源的功率谱，k_x, k_y, k_z 是波数 $k(z)$ 的三个分量；k'_x，k'_y，k'_z 是波数 $k'(z)$ 的三个分量，$k'(z)$ 的虚部与 $k(z)$ 的虚部异号；i 为虚数单位，ω 为圆频率；x' 和 y' 为噪声源在水平面的坐标；$F(z', z, k_x, k_y)$ 是一维波动方程

$$\frac{d^2F}{dz^2} + [k^2(z) - (k_x^2 + k_y^2)]F = 0 \qquad (2)$$

的满足辐射条件及点源奇性条件的解；F^* 为 F 的复数共轭函数。

收稿日期：1987 年 5 月 28 日。

假设海洋介质没有吸收，即 $k(z)$ 及其各分量为实数，这时可引用下列 δ-函数[5]

$$\delta(k_x'-k_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix'(k_x'-k_x)}\,dx'$$

$$\delta(k_y'-k_y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy'(k_y'-k_y)}\,dy'$$

来计算 (1) 式；如此，式 (1) 可写为

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)=\iiint_{-\infty}^{\infty}g^2(\theta)S(\omega)F(z',z_1,k_x,k_y)F^*(z',z_2,k_x,k_y)\times\exp\{i[k_x(x_1-x_2)+k_y(y_1-y_2)+\omega\tau]\}dk_xdk_yd\omega \tag{3}$$

作变换

$$x_1-x_2=l\cos\varphi',\quad y_1-y_2=l\sin\varphi',$$
$$k_x=\nu\cos\varphi,\quad k_y=\nu\sin\varphi,$$
$$\nu^2=k_x^2+k_y^2,\quad l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

并注意到

$$dk_xdk_y=\nu d\nu d\varphi,$$

则式 (3) 可以写为

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}g^2(\theta)S(\omega)F(z',z_1,\nu)F^*(z',z_2,\nu)\times e^{i\omega\tau}e^{i\nu l\cos(\varphi-\varphi')}\nu d\varphi d\nu d\omega \tag{4}$$

因为

$$\int_0^{2\pi}e^{i\nu l\cos(\varphi-\varphi')}d\varphi=2\pi J_0(\nu l),$$

所以 (4) 式还可写为

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}g^2(\theta)S(\omega)F(z',z_1,\nu)F^*(z',z_2,\nu)\times e^{i\omega\tau}J_0(\nu l)\nu d\nu d\omega \tag{5}$$

以上 $J_0(\nu l)$ 为零阶 Bessel 函数。

由 (5) 式即可写出海洋中自然噪声场的空间互功率谱 $W_{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2}(\omega)$ 的积分表示式：

$$W_{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2}(\omega)=2\pi\int_0^{\infty}g^2(\theta)S(\omega)F(z',z_1,\nu)F^*(z',z_2,\nu)J_0(\nu l)\nu d\nu \tag{6}$$

值得注意的是，上式中的函数 $F(z',z,\nu)$ 不满足边界条件。如果要求 $F(z',z,\nu)$ 满足边界条件，则 (6) 式中的 $g(\theta)$ 须换为噪声源本身的方向性因子 $g_1(\theta)$[4]；如果噪声源本身无方向性因子，则上式中的 $g(\theta)$ 为 1。

二、均匀深海噪声场的空间互功率谱

假设海水是均匀的半空间，其中的波数为常数 k_0，这时一维波动方程 (2) 变为

$$\frac{d^2F}{dz^2}+[k_0^2-\nu^2]F=0 \tag{7}$$

满足辐射条件及点源奇性条件的方程 (7) 的解可以写为

$$F = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - \nu^2}} e^{i\sqrt{k_0^2-\nu^2}(z-z')} \tag{8}$$

这里 z' 为噪声源的铅直坐标。将 (8) 式代入 (6) 式中，得

$$W_{r_1r_2}(\omega) = 2\pi \int_0^\infty \frac{g^2(\theta)S(\omega)}{(k_0^2 - \nu^2)} e^{i\sqrt{k_0^2-\nu^2}(z_1-z_2)} J_0(\nu l)\nu d\nu \tag{9}$$

为了计算这个积分，必先确定 ν 的取值范围。在附录中已经证明了：对于均匀深海参量 ν 是有界的，即 ν 不能取大于 k_0 的数为其值。这样，如令 $d = z_1 - z_2$，则 (9) 式变为

$$W_{r_1r_2}(\omega) = 2\pi \int_0^{k_0} S(\omega) \frac{g^2(\theta)}{(k_0^2 - \nu^2)} e^{i\sqrt{k_0^2-\nu^2}\,d} J_0(\nu l)\nu d\nu \tag{9'}$$

在表面噪声源模型中，$g(\theta)$ 的经验公式为 $g(\theta) = \cos^n\theta$（n 为包括 0 在内的整数）。如果令 $\nu = k_0\sin\theta$，则(9′)式可写为

$$W_{r_1r_2}(\omega) = \frac{2\pi S(\omega)}{k_0^{2n}} \int_0^{k_0} [k_0^2 - \nu^2]^{n-1} e^{i\sqrt{k_0^2-\nu^2}\,d} J_0(\nu l)\nu d\nu \tag{10}$$

下面分两种情况来讨论。

1. $z_1 = z_2$ ($d = 0$) 的情况

当两个接收器位于同一水平面上时，有 $z_1 = z_2$，这时 (10) 式变为

$$W_{r_1r_2}(\omega) = 2\pi S(\omega)k_0^{-2n} \int_0^{k_0} [k_0^2 - \nu^2]^{n-1} J_0(\nu l)\nu d\nu \tag{11}$$

用分部积分法完成上式中的积分，就得均匀深海中在 $d = 0$ 时噪声场的空间互功率谱的表示式：

$$W_{r_1r_2}(\omega) = 2^n\pi S(\omega)(n-1)! \frac{J_n(k_0l)}{(k_0l)^n} \tag{12}$$

这里 $J_n(x)$ 为 n 阶 Bessel 函数。

噪声场的功率谱可令 $z_1 = z_2$ 及 $l = 0$ 从表式 (10) 中求得为

$$W(\omega) = \pi S(\omega)/n \tag{13}$$

用 (13) 式去除 (12) 式，就得噪声场的单频归一化水平互相关函数

$$\rho(l, 0) \equiv \frac{W_{r_1r_2}(\omega)}{W(\omega)} = 2^n n! \frac{J_n(k_0l)}{(k_0l)^n} \tag{14}$$

显见，当 n 取确定的值时，$\rho(l, 0)$ 有确定的表示式，例如，当

$n = 0$，$\rho(l, 0) = J_0(k_0l)$；

$n = 1$，$\rho(l, 0) = 2J_1(k_0l)/k_0l$；

$n = 2$，$\rho(l, 0) = 8J_2(k_0l)/(k_0l)^2$；

$n = 3$，$\rho(l, 0) = 48J_3(k_0l)/(k_0l)^3$。

这些结果与文献 [6] 中相应的结果完全一致。

若将 (14) 式与文献 [2] 中的 (9) 式相比较，就可发现 [2] 中的 (4) 式的积分上限扩展到“∞”是不妥当的。

2. $l = 0$ 的情况

当两个接收器位于同一垂直线上时，有 $l = 0$，如令 $z_1 - z_2 = d$，则 (10) 式变为

$$W_{r_1r_2}(\omega)=\frac{2\pi S(\omega)}{k^{2n}}\int_0^{k_0}[k_0^2-\nu^2]^{n-1}e^{i\sqrt{k_0^2-\nu^2}\,d}\,\nu d\nu \tag{15}$$

完成上式中的积分，有

$$\begin{aligned}W_{r_1r_2}(\omega)=\frac{2\pi S(\omega)}{k_0^{2n}}&\left\{\frac{e^{ik_0d}}{(id)^{2n}}[(ik_0d)^{2n-1}-(2n-1)(ik_0d)^{2n-2}\right.\\&+(2n-1)(2n-2)(ik_0d)^{2n-3}-\cdots+(-1)^{2n-1}(2n-1)!]\\&\left.-\frac{(-1)^{2n-1}}{(id)^{2n}}(2n-1)!\right\}\end{aligned} \tag{16}$$

用(13)式去除(16)式，得归一化垂直互相关函数

$$\begin{aligned}\rho(0,\ d)=\frac{2n}{k_0^{2n}}&\left\{\frac{e^{ik_0d}}{(id)^{2n}}[(ik_0d)^{2n-1}-(2n-1)(ikd)^{2n-2}\right.\\&+(2n-1)(2n-2)(ik_0d)^{2n-3}-\cdots+(-1)^{2n-1}(2n-1)!]\\&\left.-\frac{(-1)^{2n+1}}{(id)^{2n}}(2n-1)!\right\}\end{aligned} \tag{17}$$

当 n 取确定的值时，$\rho(0,\ d)$ 有确定的表示式。由于 $\rho(0,\ d)$ 为复数，故它不能直接被测量、但它的实数部分是可以直接测量的，因此在下面我们只取其实部。当 $n=1$ 时，有

$$\rho(0,\ d)=2\frac{\sin k_0d}{k_0d}+2\frac{\cos k_0d}{k_0^2d^2}-\frac{2}{(k_0d)^2};$$

当 $n=2$ 时，有

$$\rho(0,\ d)=\frac{12[(k_0d)^2-2]\cos k_0d}{(k_0d)^4}+\frac{4[(k_0d)^2-6]\sin k_0d}{(k_0d)^3}+\frac{24}{(k_0d)^4};$$

当 $n=3$ 时，有

$$\begin{aligned}\rho(0,\ d)=&\frac{6\sin k_0d}{k_0d}+\frac{30\cos k_0d}{(k_0d)^2}-\frac{120[(k_0d)^2-6]\sin k_0d}{(k_0d)^5}\\&-\frac{360[(k_0d)^2-3]}{(k_0d)^6}-\frac{720}{(k_0d)^6}。\end{aligned}$$

这些结果与文献[6]中相应的结果完全一样。

三、非均匀深海中噪声场的空间互功率谱

Cron 和 Sherman 已经估计到海水的非均匀性的影响一般是很小的。下面来证明这一结论。为了简单起见，我们只讨论 $z_1=z_2$ 以及海水中的波数分布为

$$k(z)=k_0\sqrt{1-2az}$$

的情况，式中 a 为海水中的相对声速梯度的绝对值。这时，需要求解的一维波动方程式变为：

$$\frac{d^2F}{dz^2}+[k_0^2(1-2az)-\nu^2]F=0 \tag{18}$$

这个方程可以严格求解，但为了计算的方便，我们采用精确度较高的 WKB 近似法来求

解。在 WKB 近似下，满足辐射条件及点源奇性条件的方程 (18) 的解为

$$F(z)=\frac{i}{\sqrt[4]{k_0^2(1-2az')-\nu^2}\ \sqrt[4]{k_0^2(1-2az)-\nu^2}}e^{i\int_{z'}^{z}\sqrt{k_0^2(1-2az)-\nu^2}\,dz} \tag{19}$$

代入(6)式中，有

$$W_{r_1r_2}(\omega)=2\pi S(\omega)\int_0^{k_0}\frac{[k_0^2(1-2az')-\nu^2]^{m-\frac{1}{2}}}{k_0^{2m}(1-2az')^n}[k_0^2(1-2az_1)-\nu^2]^{-1/2}J_0(\nu l)\nu d\nu \tag{20}$$

在通常的情况下，a 的变化范围为 10^{-5}—$10^{-4}\mathrm{m}^{-1}$，所以 z_1 常小于 $1/2a$。这时，式 (20) 中的 z_1 可用 z' 来代替(虽然 $z_1\gg z'$，但由于 $2az_1\ll 1$，所以这种代替不会引起明显的误差)，于是式 (20) 可写为

$$W_{r_1r_2}(\omega)=2\pi S(\omega)\int_0^{k_0}\frac{[k_0^2(1-2az')-\nu^2]^{n-1}}{k_0^{2n}(1-2az')^n}J_0(\nu l)\nu d\nu \tag{21}$$

又因为噪声源分布在海水表面附近，所以有 $z'\to 0$，这样，式 (21) 又可近似地写为

$$\begin{aligned}W_{r_1r_2}(\omega)&\cong 2\pi S(\omega)\int_0^{k_0}\frac{(k_0^2-\nu^2)^{m-1}}{k_0^{2m}}J_0(\nu l)\nu d\nu\\&=2^m\pi S(\omega)(n-1)!\,\frac{J_n(k_0l)}{(k_0l)^m}\end{aligned} \tag{22}$$

这个结果与 (12) 式完全一样，这正是我们所期望的。这个结果也就证实了 Cron 和 Shreman 的猜想[6]：海水非均匀性的影响一般是很小的。

四、结　语

综上所述，可得下面两点结论：

1. ν 的上界是海水中最大的波数；
2. 海水非均匀性的影响一般是很小的。

附录

当深海海水中的波数为有限值时，参量 ν 是有界的，证明如下。

表示式 (6) 中的函数 $F(z,\nu)$ 通常要满足一维波动方程

$$\frac{d^2F(z,\nu)}{dz^2}+[k^2(z)-\nu^2]F(z,\nu)=0 \tag{A.1}$$

边界条件

$$F(0,\nu)=0 \tag{A.2}$$

点源奇性条件

$$\left.\begin{aligned}&F(z'_-,\nu)=F(z'_+,\nu)\\&\left.\frac{dF(z,\nu)}{dz}\right|_{z=z'_-}=\left.\frac{dF(z,\nu)}{dz}\right|_{z=z'_+}+2\end{aligned}\right\} \tag{A.3}$$

以及辐射条件

$$F(\infty,\nu)=0 \tag{A.4}$$

以上 $z'_- = z' - 0$，$z'_+ = z' + 0$。将上面 4 式取复数共轭也应成立，即

$$\frac{d^2F^*(z,\ \nu)}{dz^2} + [k^2(z) - \nu^2]^* F^*(z,\ \nu) = 0 \tag{A.5}$$

$$F^*(0,\nu) = 0 \tag{A.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &F^*(z'_-,\ \nu) = F^*(z'_+,\ \nu) \\ &\left.\frac{dF^*(z,\ \nu)}{dz}\right|_{z=z'_-} = \left.\frac{dF^*(z,\ \nu)}{dz}\right|_{z=z'_+} + 2 \end{aligned}\right\} \tag{A.7}$$

$$F^*(\infty,\ \nu) = 0 \tag{A.8}$$

用 $F^*(z,\ \nu)$ 乘 (A.1) 式，加上 $F(z,\ \nu)$ 乘 (A.5) 式，并注意到 $[k^2(z) - \nu^2]$ 为实数，得

$$F^*(z,\ \nu)\ \frac{d^2F(z,\ \nu)}{dz^2} + F(z,\ \nu)\ \frac{d^2F^*(z,\ \nu)}{dz^2} + 2[k^2(z) - \nu^2]F(z,\ \nu)F^*(z,\ \nu) = 0 \tag{A.9}$$

把上式对 z 从 0 到 ∞ 进行积分，利用条件 (A.2)，(A.3)，(A.4)，(A.6)，(A.7)，(A.8)，可得

$$2\int_0^\infty [k^2(z) - \nu^2]F(z,\ \nu)F^*(z,\ \nu)dz = 2\int_0^\infty \left|\frac{dF(z,\ \nu)}{dz}\right|^2 dz - 4R_e[F(z'_-,\ \nu)]。$$

这里 $R_e(F)$ 为 F 的实部。由于噪声源分布在海水表面附近，即 $z' \to 0$，故有 $F(z'_-,\ \nu) \to 0$，于是有 $4R_e[F(z'_-,\ \nu)] \to 0$（在 z'_- 不趋于 0 的一般情况下，由于 $z'_- - z' \to 0$，所以 $R_e[F(z'_-,\ \nu)]$ 也是趋于零的，这一点可从 (8) 式和 (19) 式中看出）。这样，上式可写为

$$\int_0^\infty [k^2(z) - \nu^2]F(z,\ \nu)F^*(z,\ \nu)dz = \int_0^\infty \left|\frac{dF(z,\ \nu)}{dz}\right|^2 dz \tag{A.10}$$

用海水中最大的波数 K_0 来代替 $k(z)$，则上式变为

$$[K_0^2 - \nu^2]\int_0^\infty |F(z,\ \nu)|^2 dz \geqslant \int_0^\infty \left|\frac{dF(z,\ \nu)}{dz}\right|^2 dz \tag{A.11}$$

因为

$$\int_0^\infty |F(z,\ \nu)|^2 dz \geqslant 0, \qquad \int_0^\infty \left|\frac{dF(z,\ \nu)}{dz}\right|^2 dz \geqslant 0,$$

所以 $[K_0^2 - \nu^2] \geqslant 0$，即 $\nu^2 \leqslant K_0^2$ 或 $\nu \leqslant K_0$。

当 $k(z)$ 为常数 k_0 时，结论仍然正确。

参　考　文　献

[1] 许祯镛，1966。噪声场的时空相关函数。声学学报 **3**(1): 34—41。
[2] 吴冠君，1983。海洋自然噪声场空间互功率谱。声学学报 **8**(2): 77—84。
[3] 唐应吾，1980。表面噪声源的噪声场时空相关函数。海洋科学 **4**(4): 4—7。
[4] 唐应吾，1986。海洋噪声场的时空相关函数。声学学报 11(1): 20—29。
[5] Д. 伊凡宁柯，A. 索科洛夫，1958。经典场论。科学出版社，1—24 页。
[6] Cron, B. F., C. H. Sherman, 1962. Spatial correlation functions for various noise models. *J. Acoust. Soc. Am.* **34**(11): 1732—1736.

SPATIAL CROSS-SPECTRA OF AMBIENT NOISE FIELD IN DEEP SEA

Tang Yingwu

(Institute of Bei Hai, Academia Sinica, Qingdao)

ABSTRACT

When there is no sound absorption in the sea water, the general expression of the spatial cross-spectral function of the noise field was derived on basis of the general expression of the space-time correlation function of the ambient noise field in the ocean. The spatial cross-spectral function in homogenous deep sea is calculated. Some concrete expressions for the normalized horizontal cross-correlation function and normalized vertical cross-correlation function were obtained. Besides, the spatial cross-spectral function in a deep sea with surface layer of positive velocity gradient is also calculated. The results show that the effect due to the inhomogenous nature of the sea water is very small.