

近海流场的一个非线性三维模式*

张涤明⁺ 乔林⁺⁺ 詹杰民⁺

(⁺中山大学, 广州)

(⁺⁺河海大学, 南京)

摘要 本文用有限元与三次样条结合, 数值模拟近海水域的流场。推导方程时, 为更具一般性, 考虑了水平粘性项。作为对模式的检验, 分别计算了矩形区域的风生流和扇形区域的潮流, 均得到了满意的结果。本文还给出了伶仃洋海域流态的计算结果, 此结果比通常二维模式得到的要更为合理。

三维潮流和风生环流的数值模拟, 已有十几年历史。70 年代初, 曾有人用分析法确定速度垂直分布, 这种方法只适用于对个别点的计算。为模拟整个流场的速度垂直分布, Heaps^[9] 提出了特征函数展开法。在这个基础上, Davies 又提出了 B 样条展开法^[4]、正交函数展开法^[5,6]、Galerkin 特征函数展开法^[7]。前面这些方法, 得到的垂直分布皆是一个连续函数分布。另一些方法, 得到的是垂向一组离散点上的速度值, 而不是一个连续函数分布^[8,10,11]。

现在的三维模式, 在水平方向多采用有限差分法进行离散, 极少用有限元法。主要原因是有限元法会生成大维数系数矩阵。这样, 如要计算大区域的流场就很困难。如何利用有限元对复杂边界处理方便的特点, 而又避免求解大维数矩阵, 这是本文的主要目的。不久前, 我们曾作过类似的模拟^[1], 同样是水平方向用有限元, 垂直方向用三次样条, 不过在用三次样条离散方程时是离散分段积分后的方程。这里我们直接离散基本方程, 时间格式上也作了改进。

一、基本方程

在 σ 坐标下 ($\sigma = \frac{z+h}{\xi+h}$), 非线性水动力学方程可写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w^* \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ + \gamma \cdot v + \frac{1}{(h+\xi)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + \nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w^* \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1988 年 3 月 14 日。

$$-\gamma u + \frac{1}{(h+\xi)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + \nabla(\varepsilon \nabla v) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (h+\xi) \int_0^1 u d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} (h+\xi) \int_0^1 v d\sigma \right] \quad (3)$$

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} = - \frac{1}{h+\xi} \left(\sigma \frac{\partial \xi}{\partial t} - w \right) \\ &= - \frac{1}{h+\xi} \left\{ \sigma \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h+\xi) \int_0^\sigma u d\sigma \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h+\xi) \int_0^\sigma v d\sigma \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$; t ——时间; x, y, z ——笛卡尔坐标; u, v, w ——速度分量;
 g ——重力加速度; N ——垂向涡动粘性系数; ε ——水平涡动粘性系数; h ——静水深;
 ξ ——自由面高度; γ ——科氏力系数。

二、边界条件

问题的边界条件包括两个部分: 一个是水平方向边界条件; 另一个是垂直方向边界条件。水平方向边界条件的提法与二维全流模式的提法是相同的。

垂直方向边界条件:

水表面条件,

$$\begin{aligned} -\rho \left(N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} &= (h+\xi) F_x \\ -\rho \left(N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=1} &= (h+\xi) G_x \end{aligned} \quad (5)$$

式中 F_x, G_x 分别为 x 向和 y 向的风应力;

水底部条件,

$$u_{\sigma=0} = v_{\sigma=0} = 0 \quad (6)$$

三、垂直方向样条函数插值

用三次样条插值表示垂直方向的函数变化, 简化基本方程后可得到一组关于 x, y 的二维方程, 再用有限元法求解。

先给出样条插值的关系。将垂直方向 $[0, 1]$ 分成 l 个子区间 $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, l-1$)

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_l = 1$$

以 $f(x, y, \sigma, t)$ 表示任一流体物理量, 在 σ_i 点取值 $f_i(x, y, t)$, 对 σ 的微分取值 $f_{di}(x, y, t)$ 。

引进坐标 $\eta_i = (\sigma - \sigma_i)/h_i$, 其中 $h_i = \sigma_{i+1} - \sigma_i$, 有插值关系:

$$\begin{aligned} f(x, y, \sigma, t) &= A \cdot f_i(x, y, t) + B f_{i+1}(x, y, t) + C_1 f_{di}(x, y, t) \\ &\quad + C_2 f_{di+1}(x, y, t) \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $A = (1 - \eta_i)^2(2\eta_i + 1)$; $B = \eta_i^2(3 - 2\eta_i)$; $C_1 = \eta_i(1 - \eta_i)^2 h_i$; $C_2 = -\eta_i^2(1 - \eta_i)h_i$ 。

为保证三次样条插值二阶导数的连续性, 得到 $l - 1$ 组方程:

$$\begin{aligned} & h_{i+1} \cdot f d_i + 2(h_{i+1} + h_i) \cdot f d_{i+1} + h_i \cdot f d_{i+2} + 3 \frac{h_{i+1}}{h_i} f_i \\ & + 3 \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{h_i} \right) \cdot f_{i+1} - 3 \frac{h_i}{h_{i+1}} \cdot f_{i+2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

四、简化后的二维方程

在 $\sigma = \sigma_i$ 处, 要求 u, v 满足方程(1), (2)。

由于

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=\sigma_i} = \frac{dN}{d\sigma} \Big|_{\sigma_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_i} + N_{\sigma_i} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma_i} = N'_i \cdot f d_i + N_i f_{mi}$$

式中,

$$f_{mi} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma_i} = \begin{cases} -\frac{6}{h_i^2} f_i + \frac{6}{h_i^2} f_{i+1} - \frac{4}{h_i} f d_i - \frac{2}{h_i} f d_{i+1} \\ \frac{6}{h_i^2} f_{i-1} - \frac{6}{h_i^2} f_i + \frac{2}{h_i} f d_{i-1} - \frac{4}{h_i} f d_i \end{cases}$$

因此, 对于最底层 $i = 0$, 由 $u_0 = v_0 = 0$

得:

$$0 = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{(h + \xi)^2} [N'_0 \cdot u d_0 + N_0 u_{m0}] \quad (9)$$

$$0 = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{(h + \xi)^2} [N'_0 \cdot v d_0 + N_0 v_{m0}] \quad (10)$$

对其它各层, $i = 1, 2, \dots, l - 1$, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + w_i^* \frac{\partial u_i}{\partial \sigma} &= -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma v_i \\ &+ \frac{1}{(h + \xi)^2} [N'_i \cdot u d_i + N_i u_{mi}] + \nabla(\varepsilon \nabla u_i) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + w_i^* \frac{\partial v_i}{\partial \sigma} &= -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \gamma u_i \\ &+ \frac{1}{(h + \xi)^2} [N'_i \cdot v d_i + N_i v_{mi}] + \nabla(\varepsilon \nabla v_i) \end{aligned} \quad (12)$$

而这时, (3), (4)可表示为:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \xi) \sum_{i=0}^{l-1} Q_{xi} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[(h + \xi) \sum_{i=0}^{l-1} Q_{yi} \right] \quad (13)$$

$$w^* = \frac{-1}{h + \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \sum_{i=0}^{l-1} h_i + \frac{-1}{h + \xi} \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \xi) \sum_{i=0}^{l-1} Q_{xi} \right]$$

$$+ \frac{-1}{h+\xi} \frac{\partial}{\partial y} \left[(h+\xi) \sum_{j=0}^{i-1} Q_{yj} \right] \quad (14)$$

式中,

$$Q_{xi} = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u d\sigma = \frac{h_i}{2} (u_i + u_{i+1}) + \frac{h_i^3}{12} (u_{di} - u_{di+1})$$

$$Q_{yi} = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} v d\sigma = \frac{h_i}{2} (v_i + v_{i+1}) + \frac{h_i^3}{12} (v_{di} - v_{di+1})$$

五、有限元方法的应用

对以上二维方程组, 用有限元法求解。离散方程时采用九结点等参单元。单元的插值函数是:

$$\text{角结点} \quad \varphi_i = \frac{1}{4} (\zeta\zeta_i + \zeta^2)(\eta\eta_i + \eta^2), (\zeta_i, \eta_i) = (\pm 1, \pm 1)$$

$$\text{边结点} \quad \varphi_i = \frac{1}{2} (\zeta\zeta_i + \zeta^2)(1 - \eta^2), (\zeta_i, \eta_i) = (\pm 1, 0)$$

$$\varphi_i = \frac{1}{2} (\eta\eta_i + \eta^2)(1 - \zeta^2), (\zeta_i, \eta_i) = (0, \pm 1)$$

$$\text{中心结点} \quad \varphi_i = (1 - \zeta^2)(1 - \eta^2), (\zeta_i, \eta_i) = (0, 0)$$

单元内 x, y 坐标与局部坐标 ζ, η 的转换关系为:

$$x(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^9 \varphi_i(\zeta, \eta) x_i$$

$$y(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^9 \varphi_i(\zeta, \eta) y_i$$

单元内流动物理量的插值关系为:

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^9 f_i(t) \cdot \varphi_i(\zeta, \eta)$$

x, y 坐标到 ζ, η 坐标积分的转换关系:

$$\iint f dx dy = \iint f |J| d\zeta d\eta$$

式中, $|J| = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta}$ 是 Jacob 行列式。

令 $\Xi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_9)^T$,

对(9)至(14)用 Galerkin 近似方法,

$$O = \int_A \left\{ -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{(h+\xi)^2} [N'_0 \cdot u d_0 + N_0 \cdot u_{m0}] \right\} \Xi dx dy \quad (15)$$

$$O = \int_A \left\{ -g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{(h+\xi)^2} [N'_0 \cdot v d_0 + N_0 \cdot v_{m0}] \right\} \Xi dx dy \quad (16)$$

$$\int_A \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + w_i^* u_i \right] \Xi dx dy$$

$$= \int_A \left\{ -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma v_i + \frac{1}{(h + \xi)^2} [N_i' \cdot u d_i + N_i u_{mi}] + \nabla(\varepsilon \nabla u_i) \right\} \Xi dx dy \quad (17)$$

$$\int_A \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + w_i^* v_i \right] \Xi dx dy$$

$$= \int_A \left\{ -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \gamma u_i + \frac{1}{(h + \xi)^2} [N_i' v d_i + N_i v_{mi}] + \nabla(\varepsilon \nabla v_i) \right\} \Xi dx dy \quad (18)$$

$$\int_A \frac{\partial \xi}{\partial t} \Xi dx dy = - \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \xi) \sum_{i=0}^{i-1} Q_{xi} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h + \xi) \sum_{i=0}^{i-1} Q_{yi} \right] \right\} \Xi dx dy \quad (19)$$

$$\int_A w_i^* \Xi dx dy = \int_A - \frac{1}{h + \xi} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} \left(\sum_{j=0}^{i-1} h_j \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \xi) \sum_{j=0}^{i-1} Q_{xi} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h + \xi) \sum_{j=0}^{i-1} Q_{yi} \right] \right\} \Xi dx dy \quad (20)$$

对(17),(18)中的 $\int_A \nabla(\varepsilon \nabla f) \Xi dx dy$ 项, 利用 Green 公式有:

$$\int_A \nabla(\varepsilon \nabla f) \Xi dx dy = \int_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial f}{\partial n} \Xi ds - \int_A \varepsilon \nabla \Xi \cdot \nabla f dx dy$$

式中, f 代表 u_i 或 v_i 。

六、时间格式

时间的离散采用时间分裂法。将动量方程写成算子形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1(u) + L_2(u) + \alpha_1 + \gamma v \quad (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_1(v) + L_2(v) + \alpha_2 - \gamma u \quad (22)$$

式中:

$$L_1 = -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - w^* \frac{\partial}{\partial \sigma} + \nabla(\varepsilon \nabla); \quad L_2 = \frac{1}{(h + \xi)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial}{\partial \sigma} \right);$$

$$\alpha_1 = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \alpha_2 = -g \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

将方程离散成下列形式:

$$\frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} = L_1(u^t) + L_2(u^{t+\Delta t}) + \alpha_1^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \gamma v^t \quad (23)$$

$$\frac{v^{t+\Delta t} - v^t}{\Delta t} = L_1(v^t) + L_2(v^{t+\Delta t}) + \alpha_2^{t-\frac{\Delta t}{2}} - \gamma u^t \quad (24)$$

$$\frac{\xi^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \xi^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} = - \frac{\partial}{\partial x} (h + \xi^{t-\frac{\Delta t}{2}}) \int_0^1 u^t d\sigma - \frac{\partial}{\partial y} (h + \xi^{t-\frac{\Delta t}{2}}) \int_0^1 v^t d\sigma \quad (25)$$

应用这种形式的格式到(15)~(20),得到 $3(l+1) + 1$ 个代数方程,再用 u, v 分别替代(8)中的 f , 得到 $2(l-1)$ 个方程,加上水底和表面速度条件,得到了求解 $u_i, v_i, w_i^*, ud_i, vd_i, \xi$ 的封闭方程组。

七、数值处理的特点

在利用有限元法进行计算时,首先需要确定各项的系数矩阵。这里只能采用数值积分的办法。选取不同的数值积分的方法,所需工作量有很大不同。我们选用 Simpson 数值积分方法。由于函数在节点上取值,这使时间微分项和垂直粘性项的系数矩阵为对角阵。因此在 $t + \Delta t$ 时刻,每个节点上的速度可看成只与和该节点在同一垂线上的节点在该时刻的速度有关,而与水平邻近点该时刻的速度无关。从而将一个求解大维度系数矩阵的问题转化为求解一组小维系数矩阵的问题。问题得到简化,达到经济、实效的目的。

计算中会出现离散化引起的短波振荡,为了保证计算的准确性,需采用光滑的手段控制短波的产生。我们采用四点加权光滑技术,取

$$X_i = (1 - \alpha)X_i + \alpha \sum_{j=1}^4 e_j X_j / \sum_{j=1}^4 e_j \quad (26)$$

式中, X 为要光滑的物理量; $j = 1, 2, 3, 4$ 为与 i 相邻的节点; e_j 为点 i 至 j 距离的倒数; α 为光滑系数 ($0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$)。

八、数值计算结果

1. 模型水域计算

为了检验我们所提出的模式和方法的可行性,首先对人们理论研究通常所采用的两个规则模型水域作了计算(见图1)。

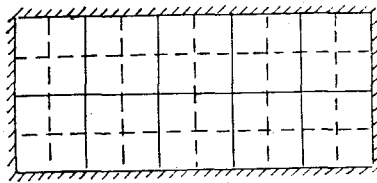


图1 矩形域平面网格图

Fig. 1 Finite-element discretization in closed rectangular basine

(1) 第一个模型 矩形明渠的风生流。

几何参数: 长 1000m, 宽 400m, 静水深为 10m。

物理参数: 忽略水平粘性, $\varepsilon = 0$; 不计科氏力, $\gamma = 0$; N 不随水深变化, $N = \text{const}$; 水表面作用-常风应力 $s (F_s = s, G_s = 0)$ 。

在上述条件下,速度垂直分布有解析解^[11]

$$u = \frac{s \cdot (h + \xi) \cdot \sigma}{4\rho N} (3\sigma - 2) \quad (0 \leq \sigma \leq 1)。$$

流动是定常的,我们以不定常流动的方程进行计算,取达到稳定状态时的解作为定常解,计算结果与解析解对比如图 2 所示(全部取值于矩形中点)。可以看出,对于此矩形水域的风生流,计算结果与解析解符合得很好。

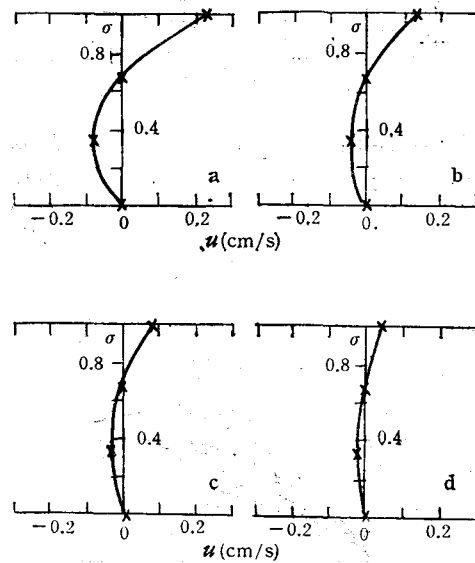


图 2 风生流速度垂直分布

Fig. 2 Vertical velocity distribution for wind-induced flow

a. $N = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$; b. $N = 0.0185 \text{ m}^2/\text{s}$; c. $N = 0.03 \text{ m}^2/\text{s}$; d. $N = 0.05 \text{ m}^2/\text{s}$.

——解析解; $\times \times \times$ 计算结果。

(2) 第二个模型 扇形海域的潮流。

几何参数 (如图 3 所示): $\Delta r = 15240 \text{ m}$, $r_1 = 4\Delta r$, $r_2 = 10\Delta r$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\Delta\theta = \frac{\pi}{16}$, 静水深为 9.14 m 。

物理参数: 潮波周期 $T = 12.4 \text{ h}$; 潮波波高 $A = 0.0305 \text{ m}$; 不计水平粘性, $\varepsilon = 0$; 不计科氏力 $\gamma = 0$; 在 $r = r_2$ 处输入潮波 $\xi_0 = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ 。

对这一模型,应用全流模式,可以得解析解^[12]。由于全流模式对潮位的计算是相当成功的,因此我们选取这一模式来检验三维模式的计算。我们取全流模式的底摩擦系数为 $\tau = 10^{-4} \text{ s}_0$ 。

对于此模型,计算结果如图 4 至图 7 所示。从潮位图和平均流速图我们看出,三维计算结果与全流模式解析解比较,潮位和平均流速的分布规律是完全相同的。但我们注意到,当取 $N = 0.0024 \text{ m}^2/\text{s}$ 稍小时,三维计算的潮位与全流模式的吻合得很好,可平均流

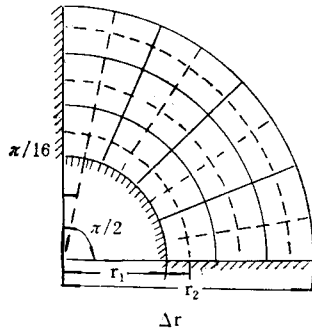


图 3 扇形域平面网格图

Fig. 3 Finite-element discretization in annular section

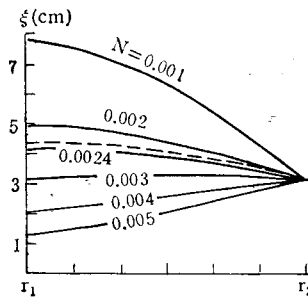


图 4 径向潮水位比较(外海边界高潮时刻)

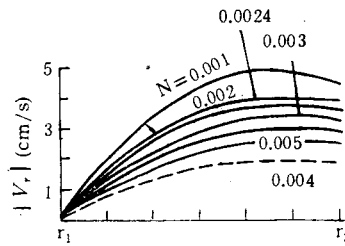
Fig. 4 Free surface height while $t = (n + 1/4)T$
----- 维解析解 ———— 计算结果。

图 5 径向平均速度比较(外海边界高潮时刻)

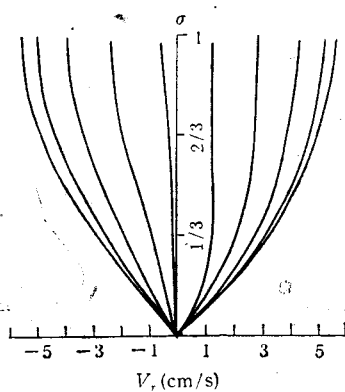
Fig. 5 Vertical velocity distribution while $t = (n + 1/4)T$
(图例同图 4)图 6 涨潮不同时刻速度垂直分布(由左向右
相邻曲线相隔 2.232s)

Fig. 6 Vertical velocity distribution at different times

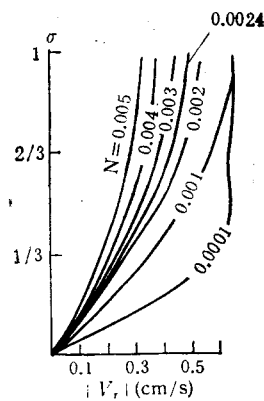


图 7 不同N的速度垂直分布

Fig. 7 Vertical velocity distribution at different viscosity coefficients

速却差别较大。如果要求三维计算的平均流速与全流模式的解析解吻合, 则大约需取 $N = 0.006 \text{ m}^2/\text{s}$, 这时潮位却差别很大, 甚至变化规律也不同。通常的经验是全流模式的潮位相当准确, 所以三维模式与全流模式比较应以潮位的吻合来衡准, 也就是说应取 $N = 0.0024 \text{ m}^2/\text{s}$ (显然还可稍小一点)。可是三维计算的平均流速就与全流模式有些差别。为什么会有平均流速的差别呢? 这涉及到全流模式的近似处理。全流模式是用经验的整体底部摩擦来代替沿水深方向流体粘性的作用的, 因而, 这种以区域边界上的摩擦力来代替区域内部粘性作用的处理, 必然会造成误差。据经验, 全流模式计算的速度普遍要比实际的低。这里三维计算的平均流速要比全流模式的大, 可见也是符合实际的。

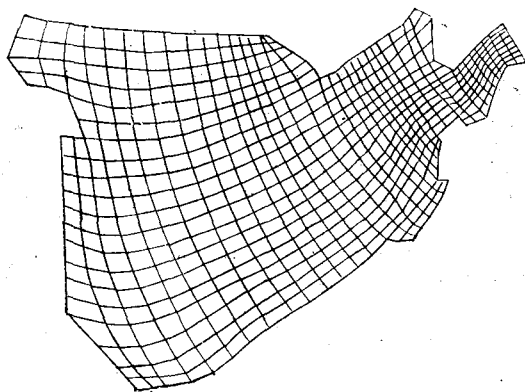


图 8 伶仃洋海域计算网格
Fig. 8 Finite-element discretization for Lingding Yang area

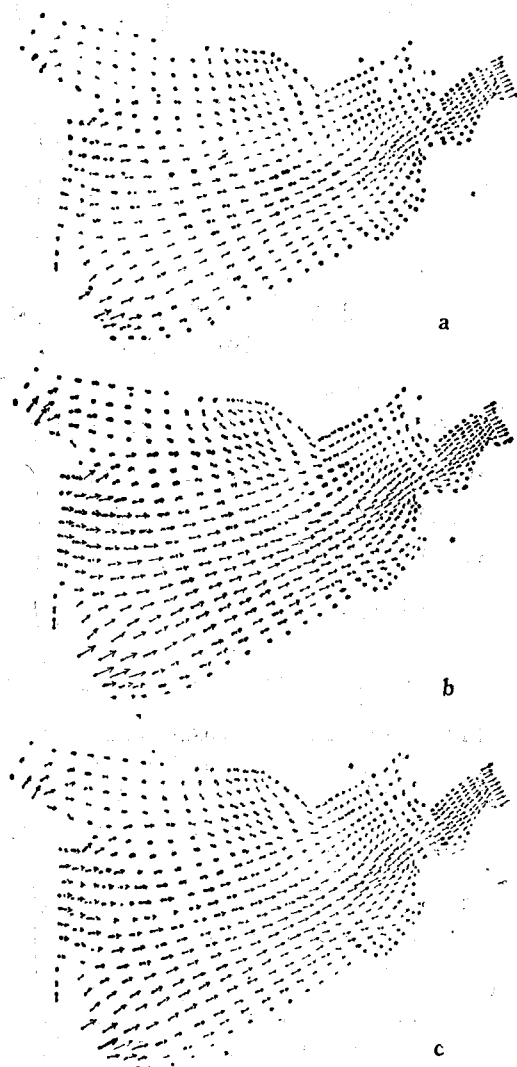


图 9 伶仃洋海域流场
Fig. 9 Fluid field patterns of tidal flow in Lingding Yang area
a. $\sigma = 1/3$; b. $\sigma = 2/3$; c. 自由表面。

2. 实例计算——伶仃洋潮流计算

伶仃洋海域位于珠江口。我们对 1978 年 6 月 23 日的夏季大潮进行了计算, 从图 8、9 可以看出, 由于底部粘附作用, 从水面到水底, 速度是递减的。从图 8 还可以看出, 在主航道上, 流动速度较大, 主航道明显地显示出来, 而在浅滩上及岸边, 流速较小, 这与实际情况很符合。在计算区域内的舢舨洲水文测量站, 有潮位的实测数据, 图 10 是计算结果与实测数据比较图, 可以看出, 结果相当吻合。

在实际的数值模拟中, 因为时间步长的微小变化, 对整个计算时间的长短影响很大,

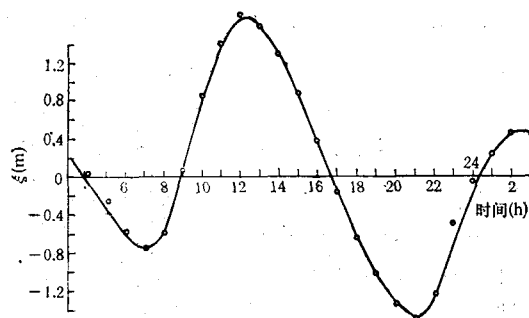


图 10 计算结果与实测数据比较图(从 1978 年 6 月 23 日 3 点到 24 日 3 点)

Fig. 10 Comparison of calculation result and observation data

——计算结果; ○ ○ ○ 实测结果。

因此,关键是时间步长的选取。我们的三维模式,在 $N = 0.001\text{m}^2/\text{s}$ 时,最长的稳定时间步长为 1500s ,这个数值远远超过文献[12]全流模式所用的 447s ,也超过了文[2]的改进二维模式的 1290s 。文献[1]的三维模式,最大步长为 700s ,与此相比,现在的 1500s 也远远超过它。计算中, N 的大小对时间步长也是有影响的。取较大的 N ,时间步长可以加长,取小的 N ,则时间步长缩短。

参 考 文 献

- [1] 张涤明,乔林,詹杰民,1988. 近海环流三维样条分层有限元模式。水动力学研究与进展 3(2): 83—92。
- [2] 张涤明,陈良圭,乔林,1988. 近海水域海洋流体动力方程的数值模拟。力学进展 18(3): 322—331。
- [3] 张涤明,陈良圭,1984. 近海浅水环流计算及绕岛环流模拟问题。水动力学研究与进展 2: 111—115。
- [4] Davies, A. M., 1977. The numerical solution of the three-dimensional hydrodynamic equations, using a B-spline representation of the vertical current profile. In Nichoul J. C. J. (ed.), Bottom Turbulence Elsevier, Pub. Co, Amsterdam, pp. 1—26.
- [5] Davies, A. M., 1980. On formulating a three-dimensional hydrodynamic sea model with an arbitrary variation of vertical eddy viscosity, Computer method in Applied mechanics and engineering 22: 187—211.
- [6] Davies, A. M. and A. Owen, 1979. Three-dimensional numerical sea model using the Galerkin method with a polynomial basis set. Applied Mathematical Modelling 3: 421—428.
- [7] Davies, A. M., 1983. Formulation of a linear three-dimensional hydrodynamic sea model using a Galerkin-Eigenfunction method. Int. J. Numer. Methods Fluid 3: 33—60.
- [8] Davies, A. M. and St C. V. Stephen, 1983. Comparison of the finite difference and Galerkin methods as applied to solution of the hydrodynamic equation. Applied mathematical Modelling 7: 226—240.
- [9] Heaps, N. S., 1972. On the numerical solution of the three-dimensional equations for tides and storm surges. Memoirs of Royal Society of Liege Series 6: 143—180.
- [10] Koutitas, C. and B. O'Connor, 1980. Modelling three-dimensional wind-induced flows. J. Hydraul Division, ASCE 106: 1843—1865.
- [11] Liu S. K. and J. J. Leenderstse, 1978. Multi-dimensional numerical modelling of estuaries and coastal seas, Advance in Hydrosience 11: 95—164.
- [12] Lynch, D. R. and W. C. Gray, 1979. A wave equation model for finite element tidal computations. Computer and Fluids 7: 207.

A MATHEMATICAL MODELLING OF THREE DIMENSIONAL NEAR SEA CIRCULATION USING FINITE ELEMENT AND CUBIC SPLINE

Zhang Diming⁺, Qiao Lin⁺⁺ and Zhan Jiemin⁺

(⁺ ZhongShan University, Guangzhou)

(⁺⁺ HeHai University, Nanjing)

ABSTRACT

3-D tidal flow and wind-induced flow have numerically been simulated for over ten years. To simulate velocity distributions in vertical direction on fluid field, Heaps^[9] gave the method using eigenfunction. On the basis of Heaps' work, Davies et al. gave method of B-spline function expansion, method of orthogonal function expansion and method of Galerkin-Eigen function expansion respectively. These methods have a general character, that is, the velocity distributions in vertical direction are continuous. Some other methods, for example, stratified modelling given by Leendertse^[10], FEM used by Koutitas and O'Connor and method of fixed-net difference in σ -coordinates adopted by Davies and Stephen, give discrete distributions of the velocity.

In this paper, a mathematical method is presented for solving the three dimensional non-linear hydrodynamic equations by using the finite element in the horizontal and the cubic spline in the vertical.

Discretization in the horizontal domain is accomplished by using the nine-node isoparametric quadratic finite element and Galerkin method is applied over the horizontal domain. In vertical direction, discretization for nonlinear terms is accomplished by using cubic spline.

Numerical results are presented for the three dimensional wind-induced flow in a closed rectangular basin, the tidal flow in an annular section and the tidal flow of Ling-Ding Yang area near South China Sea of Guangdong, Province.

For the wind-induced flow, the numerical results show excellent agreement with the analytic solutions. For the tidal flow of Ling-Ding Yang area, the result is more reasonable than by using 2-d methods.