第25卷 第5期 海洋与湖沼 Vol. 25, No. 5
1994年9月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Sep, 1994

层结流体中的非线性惯性重力内波*

侯一筠 李炜 王新生
(中国科学院海洋研究所,青岛 266071) (青岛大学物理系,青岛 266071)

提要 根据地球流体力学基本方程组,在密度垂直层结的情况下,引进行波坐标,研究非线性定形波在相平面上的几何拓扑结构。严格论证了不存在定形孤立波,并通过 Hamilton 函数及其角作用变换把行波系统化成最简形式,由此而得到非线性惯性重力内波的解析解。

关键词 层结流体 非线性 惯性重力内波

长期以来,研究旋转层结流体中的惯性重力内波一直是人们感兴趣的课题之一,这是因为地球流体中许多重要的自然现象都和重力内波有关。在这方面除了较易获得的线性结果外(Gill, 1982),形式多样的非线性分析方法不断被引入,例如多尺度方法和约化摄动法(巢纪平等,1980)。这些方法给内波的研究带来了勃勃生机。但是,每一种渐近方法都是基于弱非线性而提出的,因此,为了解决定解问题里的强非线性项,仍须采用新的数学、力学方法。

本文在三维 Boussinesq 流体的控制方程中引进行波坐标研究非线性定形波,获得了两个变量的常微分方程自治系统。通过对相图的定性分析,论证了非线性波的周期性及不存在孤波解。并通过 Hamilton 函数及其角作用变换导出非线性惯性重力内波的解析解。

1 基本方程组的定性分析

在密度层结为 $\bar{\rho}(z)$ 的 Boussinesq 流体中,描写非线性惯性重力内波(以后简称非线性波)的方程组可表示为:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}-fv=-\dfrac{1}{\bar{\rho}}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+fu=-\dfrac{1}{\bar{\rho}}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}=-\dfrac{1}{\bar{\rho}}\dfrac{\partial p}{\partial z}-\dfrac{\rho}{\bar{\rho}}g \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+v\dfrac{\partial \rho}{\partial y}-\dfrac{N^2}{g}\bar{\rho}w=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \end{cases} \tag{1}$$

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第2256号。
国家青年基金资助,B90920106号。
收稿日期: 1993年3月23日,接受日期: 1993年7月15日。

(1)式中 u,v,w 分别是 x,y,z 方向上的速度分量；t 为时间；p 为压强；ρ 为密度；f 是科氏参数；N是 Brunt-Väisälä 频率。此处设 f 与N均为常量。(1)式中非线性项主要取平流项(刘式适等,1984 年)。

为研究(1)式的定形波解,引进行波坐标,即设 $u=U(\xi), v=V(\xi), w=W(\xi), p=P(\xi), \frac{\rho}{\bar{\rho}}=\Lambda(\xi), \xi=kx+ly+mz-\sigma t$

式中 k,l,m 分别为 x,y,z 方向的波数,σ 为圆频率。代入(1)式得到:

$$\begin{cases}(-\sigma+kU+lV)U'-fV=-\dfrac{k}{\bar{\rho}}P' \\ (-\sigma+kU+lV)V'+fU=-\dfrac{l}{\bar{\rho}}P' \\ (-\sigma+kU+lV)W'=-\dfrac{m}{\bar{\rho}}P'-g\Lambda \\ (-\sigma+kU+lV)\Lambda'-\dfrac{N^2}{g}W=0 \\ kU'+lV'+mW'=0\end{cases} \tag{2}$$

式中,“′”表示对 ξ 求导。为了研究方便,作变换:

$$\begin{cases}\Phi=kU+lV \\ \Psi=-lU+kV\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}U=\dfrac{1}{k^2+l^2}(k\Phi-l\Psi) \\ V=\dfrac{1}{k^2+l^2}(l\Phi+k\Psi)\end{cases} \tag{3}$$

把(3)式代入(2)式消掉 U,V 得到:

$$\begin{cases}(-\sigma+\Phi)\Phi'-f\Psi=-(k^2+l^2)\dfrac{P'}{\bar{\rho}} \\ -(-\sigma+\Phi)\Psi'+f\Phi=0 \\ (-\sigma+\Phi)W'=-\dfrac{m}{\bar{\rho}}P'-g\Lambda \\ (-\sigma+\Phi)\Lambda'-\dfrac{N^2}{g}W=0 \\ \Phi'+mW'=0\end{cases} \tag{4}$$

(4)式中第 5 式积分一次,取积分常数为零,得:

$$W=-\frac{\Phi}{m} \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式第 4 式,并利用(4)式第 2 式导得: $\Lambda'=\dfrac{N^2}{fgm}\Psi'$

对上式积分一次,取积分常数为零,有:

$$\Lambda=\frac{N^2}{fgm}\Psi \tag{6}$$

将(5),(6)式代入(4)式第 3 式,再利用(4)式第 1 式消去 $\dfrac{P'}{\bar{\rho}}$ 可得:

$$f(k^2+l^2+m^2)(-\sigma+\Phi)\Phi' - [f^2m^2+N^2(k^2+l^2)]\Psi' = 0 \tag{7}$$

至此，(7)式与(4)式中第 2 式构成平面自治系统：

$$\begin{cases} \Phi' = \dfrac{r\Psi}{-\sigma+\Phi} \triangleq F(\Phi,\Psi) \\ \Psi' = -\dfrac{f\Phi}{-\sigma+\Phi} \triangleq G(\Phi,\Psi) \end{cases} \quad (|\Phi| < \sigma) \tag{8}$$

式中，$r = \dfrac{f^2m^2+N^2(k^2+l^2)}{f(k^2+l^2+m^2)}$

根据微分方程几何理论中关于相图的分析（秦元勋，1959）得知系统(8)在带形区域 $|\Phi| < \sigma$ 内的平衡点满足 $F(\Phi,\Psi)=0, G(\Phi,\Psi)=0$ 解之 $\Phi=0, \Psi=0$。这在物理上对应于未被扰动的状态。因(8)式在平衡点(0,0)处的导算子矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \Phi} & \dfrac{\partial F}{\partial \Psi} \\ \dfrac{\partial G}{\partial \Phi} & \dfrac{\partial G}{\partial \Psi} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{r}{\sigma} \\ \dfrac{f}{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

的特征根为纯虚数，并且非线性函数有如下性质 $F(\Phi,\Psi) = -F(\Phi,-\Psi), G(\Phi,\Psi) = G(\Phi,-\Psi)$，说明系统(8)的轨线关于 Φ 轴对称。 从而根据中心与焦点判定定理（秦元勋，1959）可知(0,0)为非线性系统的中心型平衡点，故系统(8)的相图为绕平衡点的闭轨族，表明非线性波的周期性。又因为(0,0)是系统唯一的平衡点，没有其它鞍点，同时也就没有同宿轨道或异宿轨道，故系统(8)不可能存在着孤立波解。

2 平面 Hamilton 系统及其角作用变换

在数学上通常称系统(8)为可积系统，在物理上必对应于保守系统，即存在同胚变换使系统(8)变为 Hamilton 系统（李继彬，1989）。因此可将系统(8)化成最简形式。令

$$\begin{cases} X = \Phi \\ Y = \dfrac{-\sigma+\Phi}{f}\Psi \end{cases} \text{或} \begin{cases} \Phi = X \\ \Psi = \dfrac{f}{-\sigma+X} Y \end{cases}$$

则(8)式变为

$$\begin{cases} X' = \dfrac{fr}{(X-\sigma)^2} Y \\ Y' = -X + \dfrac{fr}{(X-\sigma)^3} Y \end{cases} \quad (|X| < \sigma) \tag{9}$$

(9)式构成平面 Hamilton 系统，Hamilton 函数为

$$H(X,Y) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}\frac{fr}{(X-\sigma)^2}Y^2$$

易证 $X' = \dfrac{\partial H}{\partial Y}, Y' = -\dfrac{\partial H}{\partial X}$.

现在引入作用-角度变量（李继彬，1989），

$$
\begin{cases} I = \dfrac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma^h} \dfrac{\partial S}{\partial X} dX \\ \theta = \dfrac{\partial S}{\partial I} \end{cases} \tag{10}
$$

式中 S 为 Hamilton 系统的母函数,满足方程

$$
\frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} \frac{fr}{(X-\sigma)^2} \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 = h \tag{11}
$$

Γ^h 为闭轨道(11)式, h 为常量值,于是系统(9)在新的正则变量对 (I,θ) 下可表示为:

$$
\begin{cases} I' = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \\ \theta' = \dfrac{\partial H}{\partial I} \end{cases} \tag{12}
$$

求解方程(11),得

$$
S = \int \frac{\sigma - X}{\sqrt{fr}} \sqrt{2h - X^2}\, dX \tag{13}
$$

将(13)式代入(10)式第1式,有 $I = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\sqrt{2h}}^{\sqrt{2h}} \dfrac{\sigma - X}{\sqrt{fr}} \sqrt{2h - X^2}\, dX = \dfrac{\sigma h}{\sqrt{fr}}$,因此, $h = \dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma} I$, Hamilton 函数简化为 $H = \dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma} I$,代入方程(12)可得:

$$
\begin{cases} I' = 0 \\ \theta' = \dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma} \end{cases} \tag{14}
$$

(14)式就是非线性波系统的最简形式。对方程(14)积分,得:

$$
\begin{cases} I = \dfrac{\sigma h}{\sqrt{fr}} = \text{const}. \\ \theta = \dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma} \xi + \theta_0 \end{cases} \tag{15}
$$

式中, θ_0 为初位相。至此,经上述分析处理,已经把复杂的非线性波简化成与简谐振子完全相似的系统。

3 非线性波的解析解

利用对平面 Hamilton 系统及作用-角度变量的分析,可以求解非线性波。

因 $\theta = \dfrac{\partial S}{\partial I} = \dfrac{\partial S}{\partial h} \dfrac{\partial h}{\partial I} = \dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma} \dfrac{\partial S}{\partial h}$,根据方程(13),可得:

$$
\theta = \frac{1}{\sigma} \int \frac{\sigma - X}{\sqrt{2h - X^2}} dX = \frac{\sqrt{2h - X^2}}{\sigma} - \arccos \frac{X}{\sqrt{2h}} \tag{16}
$$

结合(15),(16)两式就得到了以反函数形式表示的非线性波解:

$$
\xi = \frac{\sqrt{2h - X^2}}{\sqrt{fr}} - \frac{\sigma}{\sqrt{fr}} \arccos \frac{X}{\sqrt{2h}} - \frac{\sigma}{\sqrt{fr}} \theta_0 \tag{17}
$$

将(17)式稍加变换，还可以得到非线性波的隐式解析解

$$X=\sqrt{2h}\cos\left(\frac{\sqrt{fr}}{\sigma}\xi+\theta_0-\frac{\sqrt{2h-X^2}}{\sigma}\right)$$

即：
$$\Phi=\sqrt{2h}\cos\left(\frac{\sqrt{fr}}{\sigma}\xi+\theta_0-\frac{\sqrt{2h-\Phi^2}}{\sigma}\right)$$

由 Hamilton 函数和变换 $\Phi=X$，$\Psi=\dfrac{f}{-\sigma+X}Y$ 可得系统（8）的首次积分为 $\Phi^2+\dfrac{r}{f}\Psi^2=2h$，因此导得：

$$\Psi=\sqrt{\frac{2hf}{r}}\sin\left(\frac{\sqrt{fr}}{\sigma}\xi+\theta_0-\frac{\sqrt{2h-\Phi^2}}{\sigma}\right)$$

即系统(8)的精确解为

$$\begin{cases}\Phi=\sqrt{2h}\cos Z\\ \Psi=\sqrt{\dfrac{2hf}{r}}\sin Z\end{cases}\tag{18}$$

式中 $Z=\dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma}\xi+\theta_0-\dfrac{\sqrt{2h-\Phi^2}}{\sigma}=\dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma}\xi+\theta_0-\sqrt{\dfrac{r}{f}}\dfrac{\Psi}{\sigma}$。

将(18)式代入(3)，(5)两式，就有

$$\begin{cases}U=\dfrac{\sqrt{2h}}{k^2+l^2}\left(k\cos Z-l\sqrt{\dfrac{f}{r}}\sin Z\right)\\ V=\dfrac{\sqrt{2h}}{k^2+l^2}\left(l\cos Z+k\sqrt{\dfrac{f}{r}}\sin Z\right)\\ W=-\dfrac{\sqrt{2h}}{m}\cos Z\end{cases}\tag{19}$$

若引进行波方向角，如图 1 所示

$$k=|\boldsymbol{k}|\cos\alpha\ \cos\beta$$
$$l=|\boldsymbol{k}|\cos\alpha\ \sin\beta$$
$$m=|\boldsymbol{k}|\sin\alpha$$
$$|\boldsymbol{k}|=\sqrt{k^2+l^2+m^2}$$

并定义 $U_0=\dfrac{\sqrt{2h}}{m}$ 为行波垂向特征速度，则(19)式可表示为

$$
\begin{cases}
U = U_0 \mathrm{tg}\,\alpha \left(\cos\beta \cos Z - \sqrt{\dfrac{f}{r}} \sin\beta \sin Z \right) \\
V = U_0 \mathrm{tg}\,\alpha \left(\sin\beta \cos Z + \sqrt{\dfrac{f}{r}} \cos\beta \sin Z \right) \\
W = -U_0 \cos Z
\end{cases}
\tag{20}
$$

当 $|\Phi| \ll \sigma$ 时 $Z = \dfrac{\sqrt{fr}}{\sigma}\xi + \mathrm{const}$,(20)式退化为线性波解,并且可以得到线性频散关系

$$
\sigma^2 = fr = \frac{f^2m^2 + N^2(k^2 + l^2)}{k^2 + l^2 + m^2}
$$

所以本文求出的波解包括线性波作为极限情况。

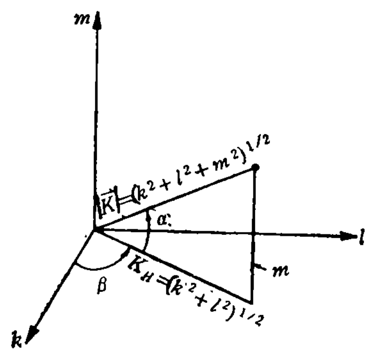

图 1 行波方向角

Fig.1 Directional angle of travelling wave

4 结语

三维非线性惯性重力内波的定形波解可通过常微分方程理论与分析动力学相结合的方法求得。研究非线性波在相平面上的几何拓扑结构可以对行波系统进行定性分析。本文给出的 Hamilton 函数及其角作用变换的处理方法可用来研究地球流体中其它类非线性波。

参 考 文 献

刘式适等,1984,层结切变流体非线性惯性重力内波的稳定性,气象学报,42: 24—33。
李继彬,1989,浑沌与 Melnikov 方法,重庆大学出版社,64—70。
秦元勋,1959,微分方程所定义的积分曲线,科学出版社(北京),82—113。
巢纪平等,1980,旋转正压大气中的椭圆余弦波,中国科学,7: 697—705。
Gill, A. E., 1982, Atmosphere-Ocean Dynamics, Academic Press, INC. (New York), pp. 128—134.

NONLINEAR INERTIA-GRAVITY INTERNAL WAVE IN STRATIFIED FLUID

Hou Yijun, Li Wei

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao* 266071)

Wang Xinsheng

(*Department of Physics, Qingdao University, Qingdao* 266071)

ABSTRACT

Based on the fundamental equations of geophysical fluid dynamics and the consequence of vertical density stratification, this research applies travelling wave coordinate to the 3-D Boussinesq fluid to study the nonlinear permanent wave. An autonomous system of ordinary differential equations in two variables is obtained as follows:

$$\begin{cases} \Phi' = \dfrac{r\Psi}{-\sigma+\Phi} \\ \Psi' = -\dfrac{f\Phi}{-\sigma+\Phi} \end{cases} \quad (|\Phi| < \sigma)$$

Rigorous study of the mathematical mechanics of the geometric topological structures in phase plane led to the conclusion that nonlinear wave is periodic in propagation direction and that solitary waves do not exist.

Further researches showed the travelling wave system can be transformed into a simpler form by using the Hamilton function and "action-angle" variables so that the complex nonlinear wave was simplified into a system like simple harmonic vibration.

Using the transformed form of nonlinear wave and the directional angle of travelling wave, the analytic solution of nonlinear inertia-gravity internal wave can be written in the form

$$\begin{cases} U = U_0 \operatorname{tg}\alpha \left(\cos\beta \cos Z - \sqrt{\dfrac{f}{r}} \sin\beta \sin Z\right) \\ V = U_0 \operatorname{tg}\alpha \left(\sin\beta \cos Z + \sqrt{\dfrac{f}{r}} \cos\beta \sin Z\right) \\ W = -U_0 \cos Z. \end{cases}$$

Key words Stratified fluid　Nonlinear　Inertia-gravity internal wave

* Contribution No. 2256 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.