

一维水域潮波运动的变浅效应*

钱力强

杜勇

俞光耀

(中海物探工程勘察公司, 塘沽 300456) (青岛海洋大学环境学院, 青岛 266003)

提要 根据浅水非线性潮波动力学方程, 考虑线性变浅的一维水域, 采用摄动法求解得到了变浅效应所产生的附加潮波部分, 进而根据所得解的讨论, 较详细地揭示了潮波进入浅海后变浅效应的作用下所发生的变化, 并得出结论。变浅效应使进入浅海的潮波波速变慢。摩擦效应与变浅效应的相互作用决定了潮波振幅的变化, 当变浅效应大于摩擦效应时, 潮波振幅增加, 且变浅效应越强, 潮波振幅增加越大, 反之则减小。

关键词 变浅效应 浅水潮波 摩擦效应

由于地形、摩擦等因子的影响, 传入近海的潮波将产生浅海潮波、潮汐余流及其他变化。在影响潮波运动的诸多因子中, 变浅效应对潮波运动的影响是比较复杂的。多年来, 许多学者曾对入海河口、海峡、沟渠等海区内的潮波运动过程中的底摩擦效应、浅水效应、变窄效应等问题进行了大量的探讨和研究。若不考虑摩擦效应, 河口的变浅与变窄都仅仅是使截面变小, 作用是相同的。考虑底摩擦效应之后, 变浅效应就具有独特的二重性。首先变浅将导致潮汐的水体集中, 从而可能使波高增长。另一方面, 变浅也使底摩擦效应增大, 消耗更多的潮能, 进而可能导致波高减小。因此, 考虑摩擦作用下的变浅效应将是一个十分重要的问题。本文采用考虑摩擦的非线性潮波方程, 取水深 h 为 α 的线性函数, 由摄动法求得了前两阶摄动解, 进而分析了不同情况下变浅效应对潮波运动的影响, 初步揭示了变浅效应对进入浅海的潮波的作用机制。

1 基本方程及边界条件

一维水域潮波运动可由以下非线性方程描述(方国洪等, 1986)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{pu}{h + \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta)] &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = u_0(t); \quad \zeta|_{x=0} = \zeta_0(t) \quad (1')$$

式中: x 为水平坐标; u 为水平流速; ζ 是相对平均海面的潮位高度; h 为水深, 在此取 $h = h_0 - \alpha x$, α 为变浅系数, h_0 为起算点的水深, $p = \frac{8|V|}{3\pi}$ 是线性摩擦系数, $|V|$ 是特征流速, k 取 0.002—0.0025, g 为重力加速度。用 \sim 表示有因次量, 以 $h = \bar{h}/h_0$, $x = \tilde{x}/L$,

* 自选课题。钱力强, 男, 出生于 1956 年 9 月, 硕士, 高级工程师。

收稿日期: 1993 年 9 月 27 日, 接受日期: 1994 年 3 月 7 日。

$\zeta = \bar{\zeta}_0$, $u = \bar{u}/\zeta \sqrt{g/h_0}$, $t = \bar{t} \sqrt{gh_0}/L$, $p = \bar{p}L/h_0 \sqrt{gh_0}$, $\alpha = \bar{\alpha}L/h_0$, 对方程(1)进行无因次化处理后, 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{pu}{1 - \alpha x + \varepsilon \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial x} [(1 - \alpha x + \varepsilon \zeta)u] &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u_0(t); \quad \zeta|_{x=0} = \zeta_0(t) \quad (2')$$

将(2)式右端第二项做近似处理:

$$\frac{1}{1 - \alpha x + \varepsilon \zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x - \varepsilon \zeta)^n \quad (3)$$

且采用以下渐近系列:

$$(\zeta, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (\zeta_n, u_n) \quad (4)$$

$$[\zeta_0(t), u_0(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (\zeta_{0j}^*, u_{0j}^*) \quad (5)$$

其中, $\varepsilon = \frac{|\zeta|}{h_0}$ 为无因次振幅, 为使问题得以简化, 将变浅系数数 α 也与 ε 联系起来, 令: $\alpha = \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots$, 将(3)–(5)式及 α 的展开式代入(2)和(2')式, 比较 ε 的同阶项得到各阶方程。

0(1) 阶方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + pu &= 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\zeta_0|_{x=0} = \zeta_{00}^*, \quad u_0|_{x=0} = u_{00}^* \quad (6')$$

0(ε) 阶方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + pu_1 &= -p\alpha_1 x u_0 + p\zeta_0 u_0 - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \alpha_1 u_0 + \alpha_1 x \frac{\partial u_0}{\partial x} - u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - \zeta_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\zeta_1|_{x=0} = \zeta_{01}^*; \quad u_1|_{x=0} = u_{01}^* \quad (7')$$

2 摄动解的得出

2.1 0(1) 阶解

在文献(杜勇等, 1989)中, 令变窄系数 $c = 0$, 可得出本文模式的

0(1) 阶解:

$$u_0 = \text{Re}[A_1 e^{\beta_1 x + i\sigma t} + A_2 e^{\beta_2 x + i\sigma t}] \quad (8)$$

$$\zeta_0 = \text{Re}[B_1 e^{\beta_1 x + i\sigma t} + B_2 e^{\beta_2 x + i\sigma t}] \quad (9)$$

2.2 0(ε) 阶解

令: $u_1 + u_{11} + u_{12}$, $\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12}$, 将方程组(7)分为两个方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x} + pu_{11} &= -p\alpha_1 x u_0 + p\alpha_0 u_0 \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial t} &= \alpha_1 \left(u_0 + x \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_{12}}{\partial x} + pu_{12} &= -u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{12}}{\partial t} &= u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \zeta_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

方程组(11)的形式与文献(杜勇等, 1989)中 $b = 0$ 的情况完全一致, 其解的物理意义在文献中已做过详细的讨论, 在此不再复述。为便于求解与变浅效应有关系的方程组(10), 仍将 u_{11} 和 ζ_{11} 分别写为 u_1 和 ζ_1 。并在以下讨论中仅取 0(1) 阶解中沿水平坐标 x 方向传播的潮波, 即取(8),(9)式中的 $A_1 = B_1 = 0$, 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + pu_1 &= -p\alpha_1 x u_0 + p\alpha_0 u_0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \alpha_1 \left(u_0 + x \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{11}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x} &= -p\alpha_1 x A_2 e^{\beta_2 x + i\sigma t} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial t} &= \alpha_1 A_2 (1 + x\beta_2) e^{\beta_2 x + i\sigma t} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{12}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_{12}}{\partial x} + pu_{12} &= \frac{p}{2} [(A_{21}B_{21} - A_{22}B_{22}) \\ &+ i(A_{21}B_{22} + A_{22}B_{21})e^{2(\beta_2 x + i\sigma t)}] + \frac{p}{2} (A_{21}B_{21} - A_{22}B_{22})e^{2\beta_2 x} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{12}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

令:

$$A_1^* = (A_{21}B_{21} - A_{22}B_{22} + i(A_{21}B_{22} + A_{22}B_{21})); \quad A_2^* = A_{21}B_{21} - A_{22}B_{22}$$

求解方程组(14)和其解:

$$u_{12} = A_3 e^{\beta_3 x + 2i\sigma t} + A_4 e^{\beta_4 x + 2i\sigma t} + \frac{i\sigma p A_1^*}{4\beta_2^2 + 2\sigma(ip - 2\sigma)} e^{2\beta_2 x + 2i\sigma t} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{12} &= B_3 e^{\beta_3 x + 2i\sigma t} + B_4 e^{\beta_4 x + 2i\sigma t} + \frac{\beta_2 p A_1^*}{4\beta_2^2 + 2\sigma(ip - 2\sigma)} e^{2\beta_2 x + 2i\sigma t} \\ &+ \frac{A_2^*}{4\beta_{21}} e^{2\beta_{21} x} + \frac{A_2^* p}{4\beta_{21}} e^{2\beta_{21} x} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 A_3, A_4, B_3, B_4 均为待定常数, 由边界条件确定:

$$\beta_j = \beta_{j1} + i\beta_{j2}$$

$$\beta_{j1} = (-1)^{j-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{(2\sigma)^4 + (2\sigma p)^2} - (2\sigma)^2}$$

$$\beta_{j2} = (-1)^{j-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{(2\sigma)^4 + (2\sigma p)^2} + (2\sigma)^2}$$

求解方程组(13)得其完整解为:

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= \operatorname{Re}\{u_{11}(x)e^{i\sigma t}\} \\
 &= \operatorname{Re}\left\{A_2\alpha_1\left[(\beta_2^2 + i\sigma p)\frac{x^2}{4\beta_2^2} + (3\beta_2^2 - i\sigma p)\frac{x}{4\beta_2^2}\right] + C_1\right\}e^{\beta_2 x + i\sigma t} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_{11} &= \operatorname{Re}\{\zeta_{11}(x)e^{i\sigma t}\} \\
 &= \operatorname{Re}\left\{B_2\alpha_1\left[(\beta_2\alpha_2^2 + i\sigma p)\frac{1}{4\beta_2^2} + \left(x^2 + \frac{x}{\beta_2}\right)\right] + C_2\right\}e^{\beta_2 x + i\sigma t} \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中 C_1 和 C_2 为待定常数, 由边界条件确定, 且满足关系式:

$$C_1\beta_2 + C_2i\sigma = A_2\alpha_1\frac{(\beta_2^2 + i\sigma p)}{4\beta_2^2} \quad (19)$$

其有量纲形式潮位解为

$$\zeta = \operatorname{Re}\left\{\frac{B_2\alpha_1}{4gh_0\beta_2}\left[g\beta_2^2 + \frac{i\sigma p}{h_0}\right]\left(x^2 + \frac{x}{\beta_2}\right)e^{\beta_2 x + i\sigma t} + C_2e^{\beta_2 x + i\sigma t}\right\} \quad (20)$$

在潮位解(20)中, 其常数项 $C_2e^{\beta_2 x + i\sigma t}$ 可以归入 $O(1)$ 阶解, 在确定边界条件时一并予以考虑。这样可单独讨论(20)中与变浅效应有关的部分。为讨论方便 $B_2 = 1$, 取实部分有:

$$\zeta = \frac{\alpha_1}{4agh_0}e^{\beta_{21}x}R\cos(\beta_{22}x + \varphi + \sigma t)$$

$$a = (\beta_{21}^2 + \beta_{22}^2)^2$$

$$R = [(A^2 + C^2)x^4 + 2(AB + CD)x^3 + (B^2 + D^2)x^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{Cx + D}{Ax + B}$$

$$A = ag\beta_{21} - \frac{1}{h}(\beta_{21}^2 - \beta_{22}^2)\beta_{22}\sigma p + \frac{2}{h_0}\beta_{21}\beta_{22}\sigma p \quad (21)$$

$$B = ag + \frac{2}{h_0}\beta_{21}\beta_{22}\sigma p$$

$$C = ag\beta_{22} + \frac{1}{h_0}(\beta_{21}^2 - \beta_{22}^2)\beta_{21}\sigma p + \frac{2}{h_0}\beta_{21}\beta_{22}\sigma p$$

$$D = \frac{1}{h_0}(\beta_{21}^2 - \beta_{22}^2)\sigma p$$

$$\beta_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{gh_0}}\sqrt{\sqrt{\sigma^4 + \frac{\sigma^2 p^2}{h_0^2}} - \sigma^2}$$

$$\beta_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{gh_0}}\sqrt{\sqrt{\sigma^4 + \frac{\sigma^2 p^2}{h_0^2}} + \sigma^2}$$

3 解的讨论

在确定 $O(\varepsilon)$ 阶解的过程中, 按照线性方程的叠加原理, 将 $O(\varepsilon)$ 阶方程分离成三个线性方程, 从而得到三部分解, 故 $\varepsilon(0)$ 阶方程的通解为三部分的叠加, 现对所得解物理意义分别给以讨论。

由方程组(11)确定的解即为杜勇(1989)二阶解中 $b = 0$ 的形式, 故其代表了源潮

波进入浅水之后由浅水非线性效应产生的潮波,但方程组(11)中不包含变浅效应项,因此浅水非线性效应引起的一系列复杂潮波在浅水区运动的过程中,不受海水深度变浅的影响,而与等深海域具有相同形式的解。但此文献的解包含有河口变窄因子 b ,由此可见水深变浅和河口变窄这两个影响河口截面的因素对于浅水非线性效应的作用是不同的,变浅效应对浅水非线性效应的影响很小,在一定精度之下可忽略不计。

对于方程(14)所确定的解,当输入两个角速率分别为 σ_1 和 σ_2 的源潮波时其解(15),(16)中将含有倍潮波、复合潮波和余流项,该解描述了摩擦非线性效应而产生的一系列潮波(方国洪,1980)。由于解(15),(16)也同变浅系数 α 无关,由此可见,变浅效应是独立作用于在变浅海域中运动的源潮波,并不影响其他浅水潮波的性质。

由解(17),(19)可以看出,与摩擦非线性及浅水非线性效应不同,变浅效应只对源潮波的振幅和相位产生影响,而不产生倍潮波和复合潮波,(21)式表示了与摩擦非线性效应及浅水非线性效应无关的纯变浅效应。由(21)式可见,当变浅系数 $\alpha = 0$ 时,控制方程化为等水深情况下的形式,解也与等深条件下的解相同。从(21)式可以看出,当 $\alpha \neq 0$ 时,便产生变浅效应,且由(21)式确定的变浅效应附加项的振幅与 α 成正比关系。应当指出的是,在实际问题中, α 不能无限制的增大,应有一定的制约。当 α 较大时,将产生反射波效应,这超出本文的假定。另外,若海底抬升过快,在很短的距离内附加潮波的振幅与源潮波振幅之和就大于实际水深从而形成涌潮。限于本文的目的,在此不予讨论。本文只就缓变海底情况下变浅效应的解给以讨论,变浅系数取值在 10^{-4} 左右或更小。

在等深情况下的源潮波解中,振幅是随水平坐标 x 按 e 指数形式变化的,而变浅效应引起的附加潮波振幅不仅按 e 指数形式变化,另外还增加了因子:

$$\frac{\alpha}{4agh_0} [(A^2 + B^2)x^4 + 2(AB + CD)x^3 + (B^2 + D^2)x^2]^{\frac{1}{2}},$$

这将使得变浅效应的分析更加复杂,为讨论变浅效应引起的附加潮波的振幅,取 $k = 0.002$, $h_0 = 10m$, 水平距离 $L = 100km$, 计算了不同的 α 值下的振幅得到图1。由图

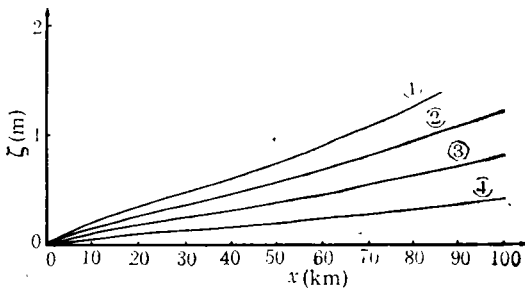


图1 附加潮波振幅在不同 α 值下随 x 的变化
($k = 0.002$)

Fig. 1 Amplitude of additional wave $V. S. x$
in different α

- ① $\alpha = 0.0001$; ② $\alpha = 0.000075$; ③ $\alpha = 0.00005$;
④ $\alpha = 0.000025$.

1可以看出,由于海水的不断变浅,使变浅效应产生的附加潮波振幅不断增大,而且 α 越大,振幅增加越大,在 $x = 100$ 附近其平均振幅量级在1m左右。

由(21)式 ζ 的表达式可知,变浅效应所产生的附加潮波与源潮波之间存在着相位差 φ 。在变浅水域中,相位差 φ 的大小取决于摩擦量 k 和分潮角速率 σ 。以 M_2 分潮为例计算的 φ 随水平坐标 x 的变化曲线见图2。摩擦效应的存在使相位差变大,且变浅效应产生的附加潮波相位始终落后于源潮波相位。

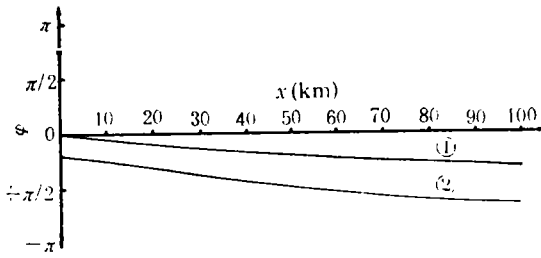


图 2 相位差 φ 随 x 的变化

Fig. 2 Phase different φ V. S x

① $k = 0$; ② $k = 0.002$ 。

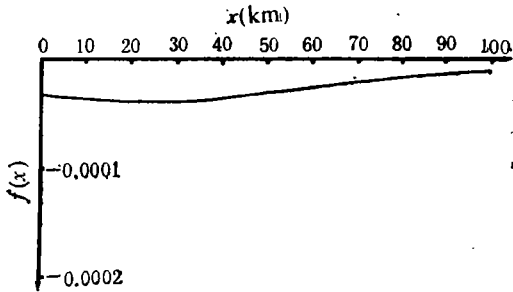


图 3 波速影响因子 $f(x)$ 随不同 x 的变化

Fig. 3 Influence factor of wave velocity V. S x

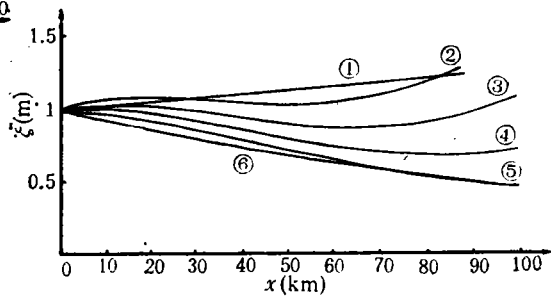


图 4 在 k 和 α 值下合成波振幅

Fig. 4 Amplitude of combined wave in different k and α

- ① $k = 0, \alpha = 0.0001$; ② $k = 0.002, \alpha = 0.0001$;
- ③ $k = 0.0002, \alpha = 0.00075$; ④ $k = 0.002, \alpha = 0.00005$;
- ⑤ $k = 0.002, \alpha = 0.000025$;
- ⑥ $k = 0.002, \alpha = 0$

在 (21) 式中令: $\theta = \beta_{22}x + \varphi + \sigma t$; 再令: $\frac{d\theta}{dt} = 0$,

可以求得:

$$c = \frac{dx}{dt} = - \frac{\sigma}{\beta_{22} + f(x)} \tag{22}$$

其中 c 为变浅效应所产生的附加潮波的波速; σ 为分潮角速率。

$$f(x) = \frac{C(Ax + B) - A(Cx + D)}{(Ax + B)^2 + (Cx + D)^2} \tag{23}$$

与等深情况下的解相比,考虑变浅效应之后产生的附加潮波,其波速受因子 $f(x)$ 的影响,由于 $f(x)$ 在变浅海域中的变化,使附加潮波波速不再为一常量,图 3 给出了 $f(x)$ 随水平坐标 x 的变化曲线。由图 3 可见 $f(x)$ 恒为负,且其绝对值随 x 变化而单调下降,因 $\beta_{22} < 0$, 从而

$$c = \frac{\sigma}{|\beta_{22}| + |f(x)|} \tag{24}$$

因此,变浅效应产生的附加潮波波速随 x 增加而增加,但恒小于等深情况下的源潮波波速。这将导致水体在水平 x 向的堆积,使附加潮波的振幅沿水平方向增加。

由图 1 可以看出,变浅效应产生的附加潮波振幅的量级在 1m 左右,但由于与源潮波之间存在相位差,所以合成波的振幅应为其矢量和的振幅。图 4 揭示了在变浅水域摩擦效应与变浅效应之间的相互作用。在源潮波开始进入变浅海域时,变浅效应强于摩擦效应,合成波振幅增大,随后摩擦效应增强,逐渐地与变浅效应相平衡,之后变浅效应相对于摩擦作用大大增强,合成波振幅迅速增加。

4 结论

根据以上讨论,可得出以下结论。

潮波进入变浅海域后,除产生浅水非线性潮波和摩擦非线性潮波外,还有一个附加潮波,并且变浅效应只作用于源潮波而不影响其他浅水潮波。

变浅效应产生的附加潮波的振幅随水平坐标 x 的增大而增大,且与变浅系数 α 成正比关系。

变浅效应与摩擦效应的相互作用决定了潮波振幅的衰减增大或基本不变三种情况,这三种情况的相互转化取决于变浅系数 α 的大小。

参 考 文 献

- 方国洪、郑文振、陈宗镛等,1986,潮汐和潮流的分析和预报,海洋出版社(北京),383—387。
 方国洪,1980,潮汐摩擦的非线性效应 I. II., 海洋与湖沼, 11(2): 98—107, 12(3): 95—209。
 杜勇、陈宗镛、叶安乐,1989,一种变截面河口中非线性潮波的研究,海洋学报, 11(6): 669—681。
 Robinson, I. S., 1980, Tides in the Bristol Channel, an analytical wedge model with friction, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 62: 77—95。
 Taylor, G. I., 1921, Tides in the Bristol Channel, *Pro. Camb. Phil. Soc.*, 20:320—325。

ON THE SHALLOW EFFECT OF THE TIDAL IN ONE-DIMENSIONAL REGION

Qian Liqiang

(COGC. Engineering Survey Company, Tanggu
300456)

Du Yong, Yu Guangyao

(Ocean University of Qingdao, Qingdao
266003)

ABSTRACT

Considering nonlinear friction effect, nonlinear tidal waves in shallow water are studied by using one-dimension nonlinear hydrodynamic equations. The water area is supposed as unit wide and the seabed slopes gradually and linearly. The equations are solved with the perturbation method to derive the second order solution, which includes an additional tidal wave (generated by the shallowing effect) besides the shallow nonlinear wave and friction nonlinear wave which are generated after the tidal wave comes into the shallow water area. The additional wave is discussed in detail. Analysis showed this wave acts on the source wave only and has nothing to do with motion characteristics of other waves moving in the shallow area. The amplitude of the additional wave is a function of the shallowing coefficient α , friction coefficient k and distance of moving into shallow water x , and has direct ratio relationship with α . The phase of this wave always independent of the seabed slope and changes in the direction of the water depth changing.

Key words Shallow effect Shallow tidal wave Frictional effect