第28卷 第3期 海 洋 与 湖 沼 Vol.28, No.3
1997 年 5 月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA May, 1997

非线性随机海浪模型的一种新形式*

刘新安 黄培基

（国家海洋局第一海洋研究所，青岛 266003）

提要 以反映随机海浪非线性的波面高度分布高阶矩为参量，提出一种新形式的非线性随机海浪模型。在三阶近似下具体导出其波面高度的表达式和推导出二阶谱。本文模式为 Longuet－Higgins 模式的另一种新的数学表示。

关键词 非线性 随机海浪 波面分布高阶矩

非线性随机海浪模型的研究自 60 年代初开始。Tick(1959), Weber(1977), Tauh(1985) 和丁平兴等(1993)等通过无旋理想液体波动方程的弱非线性摄动展开对海浪的二阶乃至高阶非线性问题做了大量的研究，但应当看到：(1)摄动解的前提条件是波动的弱非线性相互作用；(2)对一般条件下，如任意水深的波动方程求解仍然困难。Longuet－Higgins (1963) 根据海浪剖面的上、下不对称性说明非线性的存在，提出了一个非线性随机模型，该模型中诸项系数虽然理论上可通过波动方程来确定，但实际上要求解之是非常困难的。Huang (1983), Tayfun (1986) 提出采用 Stokes 波形式的随机海浪统计模型，但其仅局限于窄谱情形。众所周知，随机海浪的非线性的外观判断主要是其波面高度的概率分布是否偏离正态分布(破碎问题除外)。因此，在本文我们首次以反映随机海浪非线性存在的波面高度分布高阶矩为参量，提出一种新形式非线性随机海浪模型，该模型所描述的海浪过程严格地满足已知的波谱和波面高度分布高阶矩(或波面高度的非正态分布)，其与 Longuet－Higgins 模型相比，本文模式中诸项系数易于确定。在三阶近似下，给出了以波面高度分布的各阶矩为参量的随机波面，并推导出二阶谱。

1 非线性随机海浪的波面模式

Longuet－Higgins (1963) 将非线性随机海浪的波面高度表示为：

$$\eta=\alpha_i\xi_i+\alpha_{ij}\xi_i\xi_j+\alpha_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k+\cdots \tag{1}$$

其中，$\xi_i=a_i\cos\psi_i$, $\psi_i=r\cdot k_i-\omega_i t+\varepsilon_i$，此处 r 为静止水面上的位置矢量；a_i, ψ_i, ω_i, k_i 分别为第 i 个波的振幅、位相、圆频率及波数矢量；ε_i 为第 i 个子波均匀分布于区间 $[0, 2\pi]$ 上的随机相位，α_i, α_{ij}, α_{ijk} 均为系数。

在本文，采用如下的形式描述非线性随机海浪的波面高度：

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty}C_nH_n(Z) \tag{2}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目，49476272 号；国家海洋局青年海洋科学基金资助项目，95409 号；华东师范大学河海岸动力沉积和动力地貌综合国家重点实验室开放基金资助项目。刘新安，男，出生于 1964 年 12 月，硕士，副研究员。

收稿日期：1995 年 7 月 25 日，接受日期：1996 年 9 月 17 日。

其中，$Z\equiv\alpha_i\xi_i$为一正态过程，在本文取$\alpha_i=\dfrac{1}{\sqrt{m_0}}$，$m_0=\int_0^\infty S_Z(f)\,df$，$a_i=\sqrt{2S_Z(f_i)df}$；$C_n$为$n$阶Herimte多项式展开的系数；$H_n(Z)$为$n$阶Hermite多项式，其满足：$H_0(Z)=1$，$H_{n+1}(Z)=-e^{\frac{Z^2}{2}}\dfrac{d}{dZ}[e^{-\frac{Z^2}{2}}H_n(Z)]$。

(2)式是(1)式的一种新数学表达形式。当取$C_1=\sqrt{m_0}$，$C_\gamma=0\,(\gamma=2, 3, 4\cdots)$时，(2)式化为：

$$\eta=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i \tag{3}$$

(3)式为一线性随机海浪模型。

(2)式中系数C_n和$S_Z(f)$确定如下：若已知波面高度分布的各阶矩$\mu_m(m=1, 2, \cdots)$则式(2)中的Hermite展开系数$C_n(n=1, 2, 3\cdots)$可通过如下的齐次代数方程组求得(刘新安等，1995)：

$$\mu_m=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}C_{k_i}\right)D_m(k_1, k_2, \cdots, k_m) \tag{4}$$

其中，$\mu_m=\int_0^\infty\eta^m p(\eta)\,d\eta$，$(m=1, 2, 3\cdots)$为波面高度分布的$m$阶矩；$D_m(k_1, k_2, \cdots, k_m)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{m}H_{k_i}(Z)\right]e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ$具有如下的递推关系：

$$\begin{cases}D_1(k_1)=0\\ D_2(k_1, k_2)=\begin{cases}k_1!, & k_1=k_2\\ 0, & k_1\neq k_2\end{cases}\\ D_m(k_1, k_2, \cdots, k_m)=\sum_{j=0}^{k_m}\dfrac{k_m!k_{m-1}!}{j!(k_m-j)!(k_{m-1}-j)!}\cdot D_{m-1}(k_1, k_2, \cdots, k_{m-2}, k_m+k_{m-1}-2j)\\ (k_1, k_2, \cdots, k_m=1, 2, \cdots, \infty)\end{cases}$$

将$D_1(k_1)=0$代入(4)式知$\mu_1=0$，从而证明本文模式是一均值为0的平稳随机过程。

根据刘新安等(1994)的研究，非线性随机波面η的谱和正态过程Z的谱间存在：

$$S_\eta(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!C_n^2}{m_0^n}[S_Z(f)]^{*n} \tag{5}$$

其中，$[S_Z(f)]^{*1}=S_Z(f)$；$[S_Z(f)]^{*n}=(S_Z*\cdots*S_Z)(f)=\dfrac{1}{2}\int_0^f S_Z(f-t)[S_Z(t)]^{*(n-1)}dt+\int_0^\infty S_Z(f+t)[S_Z(t)]^{*(n-1)}dt$为$S_Z(f)$的$(n-1)$阶卷积。给定波谱$S_\eta(f)$，则线性正态过程$Z$的谱$S_Z(f)$可由(5)式数值求得。

对(2)式采用Hermite展开前两项的二阶非线性模式，本文作者(1994)曾证明了窄谱条件下其与目前所采用的Stokes波形式是一致的，并利用数值模拟手段(1995)，对二阶非线性随机波面表示模式的波面高度概率分布和谱进行了检验，得到满意结果。在本文我们进一步给出三阶非线性模式。

2 三阶非线性随机海浪模式

由(2)式知，在取 Hermite 展开前三项的三阶近似下，非线性波面可表示为:

$$\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3 \tag{6}$$

其中，$\eta_1=C_1Z$, $\eta_2=C_2(Z^2-1)$, $\eta_3=C_3(Z^3-3Z)$。现设 η_1 为一量级为 δ 的小量，则 η_n 的量级为 δ^n。对三阶近似下的波面，当计算其波面高度分布的 m 阶矩时，至少应精确至 δ^{m+2} 的量级。则(4)式简化为:

$$\begin{cases}\mu_2=C_1^2+2C_2^2\\ \mu_3=6C_1^2C_2\\ \mu_4=3C_1^4+24C_1^3C_3+60C_1^2C_2^2\end{cases} \tag{7}$$

从而有:

$$\begin{cases}C_1=\sqrt{\mu_2-\mu_3^2/(18\mu_2^2)}\\ C_2=\mu_3/(6\mu_2)\\ C_3=\dfrac{\mu_4-3\mu_2^2-4\mu_3^2/(3\mu_2)}{24\mu_2\sqrt{\mu_2-\mu_3^2/(18\mu_2^2)}}\end{cases} \tag{8}$$

由(5)式知，三阶近似下，谱 $S_\eta(f)$ 与 $S_Z(f)$ 的关系简化为:

$$S_\eta(f)=\sum_{n=1}^{3}\frac{n!C_n^2}{m_0^n}[S_Z(f)]^{*n} \tag{9}$$

其中，$[S_Z(f)]^{*2}=\frac{1}{2}\int_0^f S_Z(f-t)S_Z(t)dt+\int_0^\infty S_Z(f+t)S_Z(t)dt$，表示二阶非线性相互作用，式中前者代表高频部分，其主要集中于二倍的峰值频率附近；后者代表着低频部分。

$$\begin{aligned}[S_Z(f)]^{*3}=&\frac{1}{4}\int_0^f S_Z(f-t)\int_0^t S_Z(t-u)S_Z(u)dudt\\ &+\frac{1}{2}\int_0^f S_Z(f-t)\int_0^\infty S_Z(t+u)S_Z(u)dudt\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\infty S_Z(f+t)\int_0^t S_Z(t-u)S_Z(u)dudt\\ &+\int_0^\infty\int_0^\infty S_Z(f+t)S_Z(t+u)S_Z(u)dudt\end{aligned}$$

表示三阶非线性相互作用引起谱能量的变化。式中第一项代表三阶非线性作用的高频部分，其主要集中于三倍的峰值频率附近；第二、三项表示的谱值主要位于峰值频率附近，第四项代表着低频部分。

将(9)式变换得:

$$S_Z(f)=S(f)/C_1^2-\sum_{n=2}^{3}n!C_n^2/(m_0^{n-1}C_1^2)[S_Z(f)]^{*n} \tag{10}$$

以 $S_Z(f)=S_\eta(f)/C_1^2$ 作初值计算 $[S_Z(f)]^{*2}$ 和 $[S_Z(f)]^{*3}$ 代入(10)式可得新的 $S_Z(f)$，重复

迭式直至：

$$E \leqslant \delta \tag{11}$$

其中，$E \equiv \int_0^{\infty}\left\{S_\eta(f)-\sum_{n=1}^{3} n!\, C_n^2 [S_Z(f)]^{*n}\right\}^2 \omega(f)\, df$；$\delta$ 为精度误差；$\omega(f)$ 为窗函数。

至此，(6)式中所有系数均已具体确定。

3　二阶谱

根据二阶谱的定义，对均值为 0 的平稳随机过程，其二阶谱可表示为：

$$B(f_1, f_2)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} R(\tau_1, \tau_2)\, e^{-i(2\pi f_1\tau_1+2\pi f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \tag{12}$$

其中，$R(\tau_1, \tau_2)=E\{\eta(t)\eta(t+\tau_1)\eta(t+\tau_2)\}$，$E\{\}$ 表示为数学期望。

取波面的二阶近似，即 $\eta=C_1 Z+C_2(Z^2-1)$ 代入(12)式，参照丁平兴等(1993)的推导，可得二阶谱的理论表达式：

$$B(f_1, f_2)=2C_1^2 C_2[S_Z(f_1)S_Z(f_2)+S_Z(f_1+f_2)S_Z(f_1)+S_Z(f_1+f_2)S_Z(f_2)] \tag{13}$$

由(8)式可得以 μ_3 表示的二阶谱形式：

$$B(f_1, f_2)=\mu_3/3[S_Z(f_1)S_Z(f_2)+S_Z(f_1+f_2)S_Z(f_1)+S_Z(f_1+f_2)S_Z(f_2)] \tag{14}$$

积分(14)式有：

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} B(f_1, f_2)\, df_1 df_2=\mu_3=R(0,0) \tag{15}$$

(15)式说明了(14)式是符合二阶谱的定义。(14)式中 $B(f_1, f_2)$ 的各项物理意义可参阅丁平兴等(1993)的解释，本文不再赘述。

4　小结

4.1　采用 Hermite 级数展开形式来描述非线性随机海浪。本文模式为 Longuet－Higgins 的非线性海浪模型的另一种数学表达形式。与 Longuet－Higgins 模式相比，本文模式中的诸项系数以及组成波的振幅可分别由波面高度分布高阶矩和已知谱求得，从而使模式便于应用。

4.2　在三阶近似下，具体给出以波面高度分布的各阶矩为参量的随机波面表达式。

4.3　在本文模式中各组成波的谱分量间不是相互独立，而是互相影响，构成组成波间的能量传递。

4.4　本文还讨论了二阶谱的计算。

4.5　应指出的是：本文并未讨论非线性随机海浪模型中各组成波的波数矢量与频率间的弥散关系，因此，应用本文模式计算空间波浪场时应注意选用有关波动的非线性弥散关系。

4.6　对于三阶近似结果和二阶谱的检验与讨论将在另文给出。

参　考　文　献

丁平兴、孙　孚、余宙文，1993，中国科学(B 辑)，**13**(3)：311—317。

刘新安、黄培基，1994，海洋学报，**16**(3)：21—30。

Huang, N, E. et al., 1983, *J. Geophys, Res.*, **88**: 7 597—7 606.

Liu Xinan, Huang Peiji, *J. Chin. Limnol. Oceanol.*, **13**(3): 206—214.
Longuet-Higgins, M. S., 1963, *J. Fluid Mech.*, **17**: 459—480.
Tayfun, M. A., 1986, *J. Geophys. Res.*, **91**(C6): 7 743—7 752.
Tick, L. J., 1959, *J. Math and Mech*, **8**: 643—651.

A NEW MODEL FOR NONLINEAR RANDOM WAVES

Liu Xinan, Huang Peiji
(*First Institute of Oceanography, SOA, Qingdao* 266003)

Abstract In this paper, the sea surface elevation for nonlinear random waves is represented by using Hermite polynomial expansion,

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot H_n(Z)$$

in which, $Z \equiv \alpha_i \xi_i$ is normal process; $H_n(Z)$ is n-order Hermite polynomial. The coefficients $C_n (n=1, 2, 3, \cdots)$ in this model can be obtained from the moments of sea surface elevation, μ_m, $(m=2, 3, \cdots)$ through following relationship:

$$\mu_m=\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{m} C_{k_i}\right) \cdot D_m(k_1, k_2, \cdots, k_m).$$

In the third order approximation, the coefficients $C_n (n=1, 2, 3)$ are analytically expressed as follows:

$$\begin{cases} C_1=\sqrt{\mu_2-\mu_3^2/(18\mu_2^2)} \\ C_2=\mu_3/(6\mu_2) \\ C_3=\dfrac{\mu_4-3\mu_2^2-4\mu_3^2/(3\mu_2)}{24\mu_2\sqrt{\mu_2-\mu_3^2/(18\mu_2^2)}} \end{cases}$$

In addition, the bispectrum of nonlinear random waves under the second order approximation is derived,

$$B(f_1, f_2)=\frac{\mu_3}{3}\left[S_Z(f_1)S_Z(f_2)+S_Z(f_1+f_2)S_Z(f_1)+S_Z(f_2)S_Z(f_1+f_2)\right].$$

The new model in this paper is another formula of Longuet-Higgins' nonlinear model for random waves.

Key words Nonlinear Random waves The moments of sea surface elevation