第 28 卷 第 6 期
1997 年 11 月

海 洋 与 湖 沼
OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA

Vol.28, No.6
Nov., 1997

地球流体中的非线性重力波*

杨联贵 侯一筠 谢 强 程明华
(中国科学院海洋研究所，青岛 266071)

提要 从地球流体运动浅水模式的非线性方程出发，采用行波分析法给出了平面自治系统，利用相图理论，讨论了行波解的性质，提出了平面非线性系统不存在孤立波的结论；利用 K–B 平均法，首次获得有限振幅惯性重力波以 Rossby 数作为控制参量的非线性频散关系。

关键词 非线性重力波 频散关系

非线性方程组的求解，是地球流体力学问题中的难点之一。在这方面，已通过多种渐近方法，取得了一些有益的结果，侯一筠(1994, 1995)利用微分方程几何理论和行波方法分别求得有限振幅深水重力波和惯性波的波解形式和频散关系。刘式适等人(1983)采用非线性项在平衡点展开的办法构造了 KdV 方程，得到了有限振幅惯性重力波的一种近似解析解和频散关系。但是，展开后的系统和原系统在远离平衡点处不等价，所以导出的孤波解，并非是原非线性系统的孤立波；而由椭圆函数表示的频散关系中，存在难以确定的积分常数，使其实用性受到一定的限制。为此，本文利用微分方程的几何理论与动力学相结合的方法，用相图理论，严格论证了非线性惯性重力波不存在孤立波；用 K–B平均法(谢定裕，1983)，求得简明的、以 Rossby 数为控制参量的有限振幅惯性重力波的频散关系。

1 基本方程组的定性分析

描写地球体运动的浅水模式基本方程组 (Pedlosky, 1979) 为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}\\
&\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中，u, v 分别为 x, y 方向的速度分量；t 为时间；g 为重力加速度；h 为流体表面的高度；f 为 coriolis 参数。

假设静止流体层厚度为 H (取为常数)，则令 $h(x, y, t)=H+\eta(x, y, t)$，(1)式可以改

* 国家自然科学基金资助项目，49476276号；山东省重点基金资助项目，950128号；中国科学院重点基金资助项目，TZ952–S1–420号。杨联贵，男，出生于1961年11月，博士生

收稿日期：1996年5月13日，接受日期：1997年4月15日。

写为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+v\frac{\partial \varphi}{\partial y}+(c_0^2+\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中，$c_0^2=gH$;　$\varphi=g\eta$。

在线性近似下，惯性重力波的频散关系为：$\sigma^2=f^2+(k^2+l^2)\,c_0^2$　　(3)

式中，k,l 分别是 x,y 方向的波数；σ是波动的圆频率。

为简略起见，先考虑一维情形

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-fv=-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+fu=0\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

设(4)式的波动解为：$u=U(\xi)$, $v=V(\xi)$,　$\varphi=\Phi(\xi)$, $\xi=x-ct$　　(5)

其中，$c=\dfrac{\sigma}{k}$为波速。

将(5)式代入(4)式得：
$$
\begin{cases}
(-c+U)\,U-fV=-\Phi'\\
(-c+U)\,V+fU=0\\
-c\Phi'+(\Phi U)'+c_0^2U'=0
\end{cases}
\tag{6}
$$

式中“′”表示对ξ求导。

(6)式的第三式对ξ求积分且取积分常数为零，有：$\Phi=\dfrac{c_0^2\,U}{c-U}$　　(7)

对(7)式关于ξ求导得：$\Phi'=\dfrac{c_0^2c\,U'}{(c-U)^2}$　　(8)

将(8)式代入(6)式中的前两个方程得：
$$
\begin{aligned}
U'&=\frac{f(U-c)^2\,V}{(U-c)^3+c_0^2c}\equiv F(U,V)\\
V'&=-\frac{fU}{U-c}\equiv G(U,V)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

至此，描写非线性惯性重力波的偏微分方程组(4)，经行波变换变成了平面自治系统(9)。根据微分方程的几何理论(秦元勋，1959)，系统(9)在 $|U|<c$ 内平衡点满足

$$
\begin{cases}F(U,V)=0\\G(U,V)=0\end{cases}\quad 解之\quad\begin{cases}U=0\\V=0\end{cases}。
$$

当 $|c| > c_0$时,系统(9)在平衡点处的导算子矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial U} & \dfrac{\partial F}{\partial V} \\ \dfrac{\partial G}{\partial U} & \dfrac{\partial G}{\partial V} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{fc}{c^2 - c_0^2} \\ \dfrac{f}{c} & 0 \end{bmatrix},$$

特征值为纯虚数。又 $F(U,V) = -F(U,-V)$; $G(U,V) = G(U,-V)$, 说明系统(9)的轨线关于 v 轴对称(侯一筠,1995)。从而根据中心与焦点判定定理(秦元勋,1959)可知,(0,0)为非线性系统的中心型平衡点,故系统(9)的相图为绕平衡点的闭轨族,即非线性惯性重力波具有周期解。又因为(0,0)是系统唯一的中心型平衡点,没有其他鞍点,进而也就没有同宿轨道或异宿轨道(李继彬,1989),所以系统(9)不可能存在孤立波。

2 有限振幅波的频散关系

对于系统(9),求解析解非常困难,但当 $\left|\dfrac{U}{c}\right|$ 为小量时,可以将其在平衡点(0,0)附近作 Taylor 展开:

$$\begin{cases} U' = -\dfrac{fc}{c^2 - c_0^2} V - \dfrac{f(c^2 + 2c_0^2)}{2(c^2 - c_0^2)^2} UV - \dfrac{fc_0^4 + fc^4 + 7fc^2c_0^2}{3c(c^2 - c_0^2)^3} U^2V + \cdots \\ V' = \dfrac{f}{c} U + \dfrac{f}{c^2} U^2 + \dfrac{f}{c^3} U^3 + \cdots \end{cases} \tag{10}$$

若在(10)式中近似地保留一次项: $\begin{cases} U' = -\dfrac{fc}{c^2 - c_0^2} V \\ V' = \dfrac{f}{c} U \end{cases}$, 则是传统的线性结果,频散关系为(3)式,其轨道方程为: $\left(1 - \dfrac{c_0^2}{c^2}\right) U^2 + V^2 = U_0^2$,

其解为:

$$\begin{cases} U = \dfrac{U_0}{\sqrt{1 - \dfrac{c_0^2}{c^2}}} \cos k(x - ct) \\ V = U_0 \sin k(x - ct) \end{cases} \tag{11}$$

式中,U_0 是速度振幅。

若保留(10)式右端至三次项:

$$\begin{cases} U' = -\dfrac{fc}{c^2 - c_0^2} V - \dfrac{f(c^2 + 2c_0^2)}{2(c^2 - c_0^2)^2} UV - \dfrac{fc_0^4 + fc^4 + 7fc^2c_0^2}{3c(c^2 - c_0^2)^3} U^2V \\ V' = \dfrac{f}{c} U + \dfrac{f}{c^2} U^2 + \dfrac{f}{c^3} U^3 \end{cases} \tag{12}$$

则代表了一种有限振幅惯性重力波。

采用 K-B平均法，可以由方程组(12)求非线性项对频散的高阶修正。

参照(11)式，可令

$$\begin{cases} U = \dfrac{U_0(\xi)}{\sqrt{1-\dfrac{c_0^2}{c^2}}}\cos\theta(\xi) \\ V = U_0(\xi)\sin\theta(\xi) \end{cases} \tag{13}$$

其中，U_0 是ξ的缓变函数。

对(13)式关于ξ求导得：$\begin{cases} U' = \dfrac{U'_0}{\sqrt{1-\dfrac{c_0^2}{c^2}}}\cos\theta - \theta'\dfrac{U_0}{\sqrt{1-\dfrac{c_0^2}{c^2}}}\sin\theta \\ V' = U'_0\sin\theta + \theta' U_0\cos\theta \end{cases}$，代入(12)式，解出 U'_0，θ'，并在一个周期内求平均，有：

$$\begin{cases} U'_0 = 0 \\ \theta' = \dfrac{f}{\sqrt{c^2-c_0^2}} + \dfrac{3}{8}\dfrac{U_0^2 f}{c^3}\dfrac{1}{(\sqrt{1-c_0^2/c^2})^3} \end{cases} \tag{14}$$

注意到，波数 $k=[\theta']$, 这里，[ ]表示平均。

故 $k = \dfrac{f}{\sqrt{c^2-c_0^2}} + \dfrac{3}{8}\dfrac{U_0^2 f}{c^3(\sqrt{1-c_0^2/c^2})^3}$　　(15)

即$\dfrac{\sigma^2-c_0^2k^2}{f^2} = \left(1+\dfrac{3}{8}\dfrac{\dfrac{U_0^2k^2}{f^2}}{\dfrac{\sigma^2-c_0^2k^2}{f^2}}\right)^2$，令$\varepsilon = \dfrac{U_0 k}{f}$，为惯性重力波的 Rossby 数，则：

$$\frac{\sigma^2-c_0^2k^2}{f^2} = \left(1+\frac{3}{8}\frac{\varepsilon^2}{\dfrac{\sigma^2-c_0^2k^2}{f^2}}\right)^2 \tag{16}$$

从(16)式可以看出，有限振幅惯性重力波的频散关系中，仅含 Rossby 数的偶次方项，若在(16)式仅保留ε^2项有：$\sigma^2 = c_0^2k^2 + f^2\left(1+\dfrac{3}{4}\varepsilon^2\right)$　　(17)

显然，当$\varepsilon \ll 1$ 时，(17)式退化成线性情形的频散关系(3)。

最后考虑二维情形，令：

$$u = V(\xi),\ v = V(\xi),\quad \varphi = \Phi(\xi),\ \xi = \frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}x + \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}y - ct \tag{18}$$

将(18)式代入(2)式得：

$$
\begin{cases}
-cU' + UU'\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} + VU'\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}} - fV = -\Phi'\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} \\
-cV' + UV'\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} + VV'\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}} + fU = -\Phi'\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}} \\
-c\Phi' + (\Phi U)'\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} + (\Phi V)'\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}} + c_0^2\left(U'\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} + V'\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right) = 0
\end{cases} \tag{19}
$$

作旋转变换,即令:

$$
\begin{cases}
X = U\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} + V\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}} \\
Y = -U\dfrac{l}{\sqrt{k^2+l^2}} + V\dfrac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}
\end{cases}
\quad 或 \quad
\begin{cases}
U = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+l^2}}(kX - lY) \\
V = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+l^2}}(lX + kY)
\end{cases},
$$

代入(19)式的第二式,且对所得式子中ξ积分一次(取积分常数为零):$\Phi = \dfrac{c_0^2 X}{c - X}$,关于$\xi$求导数有:$\Phi' = \dfrac{c_0^2 c X'}{(c - X)^2}$,代入(19)式的前两式得:

$$
\begin{cases}
X' = \dfrac{f(X-c)^2 Y}{(X-c)^3 + cc_0^2} \\
Y' = -\dfrac{fX}{X-c}
\end{cases} \tag{20}
$$

(20)式和(9)式形式上完全等价,故本文的结果可以推广到二维,这里不再赘述。

3 结语

在地球流体非线性重力波的研究中,引进微分方程几何理论能够获得波动的周期性及孤立波的不存在性。通过K-B平均法,可以求出有限振幅重力波的频散关系。本文的研究方法,可以用来研究其他类有限振幅波的频散关系。

参 考 文 献

刘式适等,1983,中国科学,**3**:279—289。

李继彬,1989,浑沌与Melnikov方法,重庆大学出版社(重庆),64—70。

侯一筠,1994,中国科学,**5**:547—555。

侯一筠,1995,海洋学报,**1**:6—12。

秦元勋,1959,微分方程所定义的积分曲线,科学出版社,(北京),82—113。

谢定裕,1983,渐近方法在流体力学中的应用,友谊出版公司(北京),12—13。

Pedlosky, J., 1979, Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag (Berlin and New York), 697pp.

NONLINEAR GRAVITY WAVE IN GEOPHYSICAL FLUID

Yang Liangui, Hou Yijun, Xie Qiang, Cheng Minghua

(*Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences, Qingdao* 266071)

Abstract Variable transformation is used to convert the nonlinear equations governing geophysical fluid's motion in a shallow model into a plane automous system

$$F(U,V) = 0$$
$$G(U,V) = 0$$

Phase portrait analysis on the basis of the geometric theory of ordinary differential equations was used to study the travelling wave solution properties. The result indicates that there are no solitary waves in the nonlinear system.

In order to obtain the dispersive relationship of the finite amplitude inertia-gravity wave, Taylor expansion was used in the above system at the equilibrum point (0,0). Using the K-B average method in the expansion yield, the dispersive relationship can be written as

$$\sigma^2 = c_0^2 k^2 + f^2\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2\right)$$

$\varepsilon = \dfrac{U_0 k}{f}$ (Rossby number for inertia-gravity wave). Thus, the dispersive relationship includes Rossby number and the circular frequency σ increases with ε.

Key words Nonlinear gravity wave Dispersive relationship