

封闭环境中赤潮发生过程的数学模拟*

王寿松 刘子煌 夏综万 于斌

(中山大学数学系 广州 510275) (国家海洋局南海分局 广州 510300)

提要 基于有连续注入营养基的培养室内微生物的连续培养模式,提出一种描述在封闭环境中赤潮发生过程的藻类生长的营养动力学模型。对4种不同形式的营养增长函数,讨论了营养物质增长速度对藻类生长的影响效果。利用微分方程定性分析方法,探讨了一次赤潮发生过程4个阶段的数学模拟问题,并给出具体划分4个阶段的数值计算方案。

关键词 赤潮 发生过程 营养动力学 数学模拟

学科分类号 X172

赤潮发生是一个复杂的动态过程。从赤潮生物的出现、增殖、聚集到赤潮形成有一连串的运动发展过程,一般可以将一次完整的赤潮发生过程分为起始—发展—维持—消亡4个阶段(钱宏林等,1994;沈竝等,1995)。赤潮生物的数量变化及各种影响因素都会随时间而变化,因此,可将赤潮发生的过程当作动力学系统来考虑(王寿松等,1997)。许多研究(齐雨藻等,1991;钱宏林等,1994)表明,起始营养物质浓度的高度增长是导致藻类(赤潮生物)急剧增殖的主要因素,而藻类数量迅速发展消耗了大量营养物质,致使营养物质浓度又有所下降;由于营养物质浓度持续下降便将影响藻类繁殖乃至大量死亡。这大体上反映了赤潮发生由起始、发展、维持到消亡的全过程。而这个过程在较短的时间(2—4d)内完成。本文试图建立在封闭环境中营养物质浓度变动与赤潮生物(藻类)消长之间相互制约关系的营养动力学模型,忽略鱼类等生物天敌的影响,有些海况环境的因素用模型中的参数来体现,利用微分方程定性分析方法,并通过计算机模拟,首次提出用以探讨赤潮发生过程4个阶段的数量变化规律,从而为更深入和具体研究赤潮的发生机制提供参考。

1 单种藻类生长的营养动力学模型

基于有连续注入营养基的培养室内微生物的连续培养模式(陈兰荪等,1993),本文提出一种作为描述在封闭环境中赤潮发生过程的藻类生长的营养动力学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = r_1 [c_1(E_0 - E) - ag(E)S] \\ \frac{dS}{dt} = r_2 [-(\gamma + c_2)S + \varepsilon ag(E)S] \end{cases} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目,9389008号。王寿松,男,出生于1937年9月,硕士导师,教授, E-mail: stswss @ zsulink. zsu. edu, cn

收稿日期:1996-3-18,收修改稿日期:1997-4-20

其中, $E = E(t), S = S(t)$, 分别表示随时间 t 变化的营养物质浓度和藻类密度; c_1, c_2 分别表示营养物质、藻类的环境损耗率; a 及 ε 分别表示赤潮藻类的最大营养吸收率及其摄食转换比率, ($0 < \varepsilon < 1$); γ 为藻类的死亡率; E_0 为定量输入营养物质的浓度; r_1, r_2 分别为营养物质、藻类的相对增长比率; $g(E)$ 表示营养增长函数。

营养物质中起关键作用的元素成分可随藻类种类不同而有所差别, 例如日本学者(转引自梁松等, 1989)根据赤潮生物增殖跟海水营养物质的关系, 将赤潮生物分为三种类型: 营养盐(N,P)型; 微量元素(Fe, Mn等)型; 特殊有机物(维生素、蛋白质等)型。而夜光藻缺乏自营养方式, 并不能直接吸收无机营养盐, 不过赤潮期间的高浓度营养盐却可促进夜光藻的主要食物——硅藻等的大量繁殖。因此模型(1)可用于描述某种赤潮藻类对某个营养元素的依赖关系, 例如邹景忠等(1983)指出磷含量的高低是决定是否出现夜光藻赤潮高峰和形成赤潮的重要因素; 也可以描述赤潮藻类对若干营养元素, 甚至经研究确定的所有相关营养元素的总浓度之间的依赖关系。而对于夜光藻赤潮, 模型(1)可描述夜光藻与硅藻(作为夜光藻的直接营养)之间的关系, 也可描述夜光藻与影响硅藻增殖的无机盐(作为夜光藻的“初级养分”)之间的关系(谢健等, 1993)。

在营养动力学和微生物培养研究的有关文献(陈兰荪等, 1993)中, 对营养增长函数 $g(E)$ 已提出了许多各种不同的形式。在此, 根据海洋藻类生长的具体情况提出如下4种形式(王寿松等, 1997):

$$g_1(E) = \begin{cases} E / 2E_m & 0 \leq E < 2E_m \\ 1 & E \geq 2E_m \end{cases} \quad (2)$$

$$g_2(E) = E / (E_m + E) \quad (3)$$

$$g_3(E) = 1 - \exp(-E \ln / 2E_m) \quad (4)$$

$$g_4(E) = E^2 / (E_m^2 + E^2) \quad (5)$$

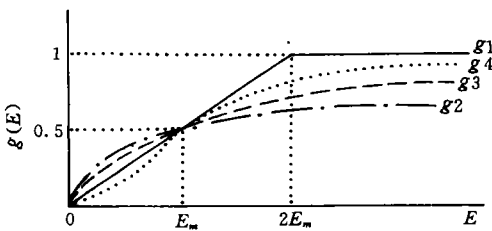


图1 营养增长函数的4种形式(g_1-g_4)

Fig.1 Four forms of the nutrient growth function (g_1-g_4)

其中, E_m 为营养物质半饱和参数, 因为4种函数 $g_i(E)$, ($i = 1, 2, 3, 4$), 均是单调递增且有极限值1(为饱和值), 显然 $g_i(E_m) = 1 / 2$, ($i = 1, 2, 3, 4$), 相互关系可见图1。

从模型(1)中第二方程可以看出, $\varepsilon a g(E)$ 项可理解为藻类种群的相对增长率, $g(E)$ 的增长快慢直接影响着藻类数量的增长速度, 从图1得知, 当 $E > E_m$ 时有如下关系:

$$g_2(E) < g_3(E) < g_4(E) < g_1(E), (E > E_m) \quad (6)$$

因此, 采用 $g_1(E)$ 或 $g_4(E)$ 形式的模型(1)将会使得藻类获得更高的数量。为了说明这个结论, 选用如下一组参数值(王寿松等, 1997):

$r_1 = 1.2, r_2 = 13, c_1 = 0.2, c_2 = 0.975, a = 2.5, \varepsilon = 0.95, \gamma = 0.9, E_0 = 13, E_m = 0.15$; 初始值 $E(0) = 4, S(0) = 0.1$, 从模型(1)分别对 $g(E) = g_i(E)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) 进行

数值求解。上述 4 种营养增长形式对模型 (1) 产生明显不同的效果 (图 2)。在这些参数中, 除 r_1, r_2 及 ε 为无量纲之外, 其他参数都是有量纲的, 因本文着眼于机理分析, 故这些参数的量纲不一列出。

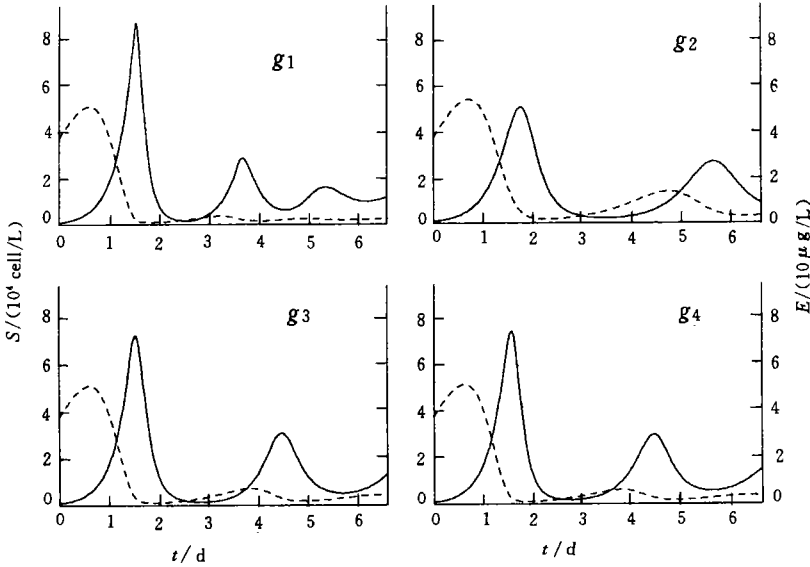


图 2 赤潮藻类营养动力学模型 4 种营养增长形式 (g_1-g_4) 的效果比较
 Fig.2 Comparison of effect for four nutrient growth forms (g_1-g_4) in nutrient dynamic model of red tide alga
 ——S, ---E

另外, 从图 1 可以看出, 半饱和参数 E_m 的大小又直接影响着营养增长函数 $g(E)$ 增长的速度, 且 E_m 会促使更快地增长。因此, 可以对不同藻类选用不同形式的增长函数 $g_i(E)$, 即使利用同一形式的增长函数也可以改变半饱和参数 E_m 的大小, 以使模型 (1) 适用于各种藻类的营养动力学增长规律, 至于不同海域的各种环境差异则可以通过改变其他参数 (如 c_1, c_2, E_0, r_1, r_2 等) 来体现, 所以, 模型 (1) 有相当广泛的适用性。

2 赤潮发生全过程 4 个阶段的数量划分

钱宏林等 (1994) 对赤潮发生过程 4 个阶段期间的物理、化学、生物等因素作了详细分析。但是, 4 个阶段的基本数值特征是什么? 4 个阶段的划分如何定量地限定? 这是一个值得深入探索的问题。这里以藻类生长的营养动力学模型 (1) 为基础, 利用常微分方程的定性分析方法, 探讨赤潮发生过程的 4 个阶段的划分问题, 给出具体划分 4 个阶段的数值计算方案。

首先, 在 (E, S) 平面上的正卦限 $R_+^2 = \{(E, S) : E \geq 0, S \geq 0\}$ 内, 作出两条线:

$$l_1: S = c_1(E_0 - E) / ag(E) \tag{7}$$

$$l_2: E = E^* \tag{8}$$

其中 E^* 满足方程: $g(E^*) = (\gamma + c_2) / ae$ (9)

这里, E^* 表示平衡的营养物质浓度, 相对于 $g_i(E^*)$, ($i = 1, 2, 3, 4$), 可以得到:

$$\begin{cases} E_1^* = 2E_m(\gamma + c_2) / a\varepsilon \\ E_2^* = E_m(\gamma + c_2) / [a\varepsilon - (\gamma + c_2)] \\ E_3^* = (E_m / \ln 2) \ln \{ a\varepsilon / [a\varepsilon - (\gamma + c_2)] \} \\ E_4^* = E_m \{ (\gamma + c_2) / [a\varepsilon - (\gamma + c_2)] \}^{1/2} \end{cases} \quad (10)$$

l_1 称为垂直等倾线,模型(1)的解轨线将以垂直方向穿过 l_1 ;而 l_2 称为水平等倾线,模型(1)的解轨线将以水平方向穿过 l_2 。因而, l_1 与 l_2 把 R_+^2 分成4个(I—IV)区域:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \{(E, S) : \dot{E} > 0, \dot{S} > 0\} & \text{II} &= \{(E, S) : \dot{E} < 0, \dot{S} > 0\} \\ \text{III} &= \{(E, S) : \dot{E} < 0, \dot{S} < 0\} & \text{IV} &= \{(E, S) : \dot{E} > 0, \dot{S} < 0\} \end{aligned}$$

这里, $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$, $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$, 在各个区域内轨线走向的方向场见图 3a。此时,模型(1)从区域 I

出发的轨线 $L[E(t), S(t)]$ 随时间 $t \geq t_0$ 增大而上升,且必有一个时刻 t_1 穿过 l_1 进入区域 II,在穿过 l_1 时 $E(t_1)$ 达到最大值;在区域 II 内, $S(t)$ 将急剧增长而 $E(t)$ 会转为下降, L 必在一个时刻 t_2 穿过 l_2 进入区域 III,使得 $S(t_2)$ 达到最大值;在区域 III 内 $S(t)$ 与 $E(t)$ 都将下降,并在一个时刻 t_3 , L 穿过 l_1 进入区域 IV, $E(t)$ 在 t_3 达到最小值 $E(t_3)$,在区域 IV 内 $E(t)$ 转为上升,而 $S(t)$ 继续下降并将在某个时刻 t_4 达到最小值 $S(t_4)$, L 在 t_4 时刻穿过 l_2 再次进入区域 I 内(见图 3a)。

如果模型(1)中反映环境各因素的参数及营养物质浓度、藻类密度的初始值 $E(t_0)$, $S(t_0)$ 满足一定的条件,致使模型(1)的解轨线在区域 II 内有较高增长,使得 $S(t_2)$ 值超过公认的所谓赤潮密度临界值 \tilde{S} ,此时 $S(t)$ 的增长即形成了赤潮(王寿松等,1997)。根据模型(1)的性质,其解轨线 L 必经历由区域 I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV 后再在 $S(t_4) < S^*$ 处返回 I 内,这种过程恰好对应于一次赤潮发生过程的 4 个阶段(见图 3b)。

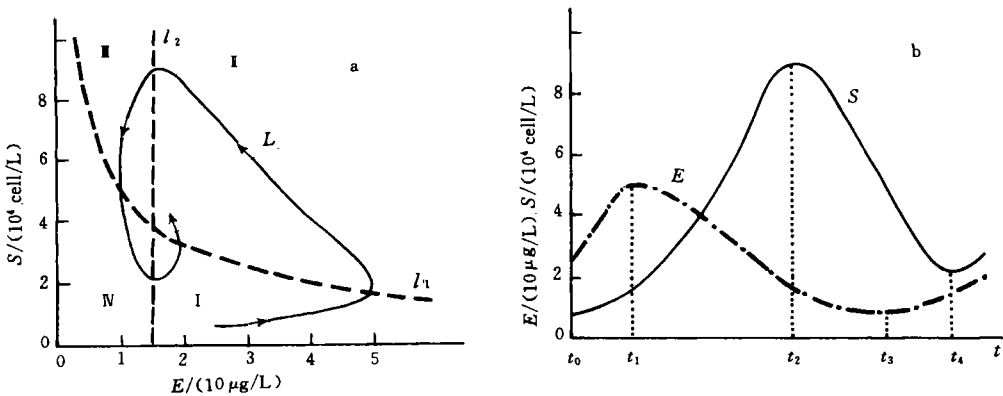


图 3 一次赤潮发生过程 4 个阶段的划分

Fig.3 Differentiation of four stages in the process of red tide occurrence

a. E-S 关系图; b. E, S 过程图

通过对模型(1)的定性讨论可知,其解轨线 L 必将经过若干有阻尼的振荡后,最终走向稳定的平衡状态 (E^*, S^*) , 即 $(E(t), S(t)) \rightarrow (E^*, S^*)$ (见图 4a)。

如果 L 在经过第一次高峰(形成第一次赤潮)后返回区域 I 内,仍满足一定的条件致使 L 的第二次高峰中有 $S(t'_2) > \bar{S}$,其中, t'_2 为 L 第二次穿过 l_2 的时刻,此时说明连续产生第二次赤潮(见图 4b)。

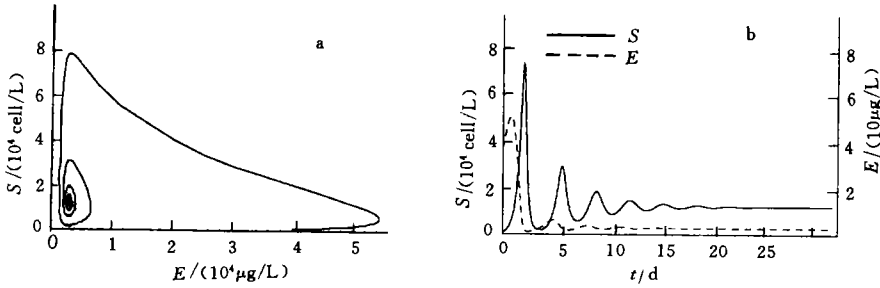


图 4 赤潮藻类营养动力学模型的全局动态图貌

Fig.4 Global dynamic graph for nutrient dynamic model of red tide alga

a. E-S关系图; b. E, S过程图

3 结语

从以上讨论可得以下结论:

3.1 模型(1)在适当的参数选择下可以用来说明一次赤潮发生全过程的4个阶段的基本特征:在起始阶段中营养物质浓度 $E(t)$ 和藻类密度 $S(t)$ 都增大;在发展阶段中 $S(t)$ 迅速增大而 $E(t)$ 则下降;在维持阶段中 $E(t)$ 继续下降致使 $S(t)$ 转为下降,并且 $S(t)$ 将由大于赤潮临界值 \bar{S} 转入小于 \bar{S} 的过渡过程;在消亡阶段中由于藻类密度 $S(t)$ 的继续减少和藻类尸体的分解而使营养物质浓度 $E(t)$ 转为回升。模型(1)中存在正平衡点 (E^*, S^*) ,说明赤潮消失并非形成赤潮原因藻类的消失,在所研究的海域中仍存在产生赤潮的富营养基础和一定数量的赤潮藻种(孢囊)密度。

3.2 具体划分4个阶段的方案可以通过实际计算 $E(t_1) \rightarrow S(t_2) \rightarrow E(t_3) \rightarrow S(t_4)$ 来实现,但由于模型(1)是非线性系统,很难求出解的具体分析表达式,不能直接立刻求得这4个界限值,通过对模型(1)的数值解法,只要分别求出 $E(t)$ 和 $S(t)$ 的最大、最小值,利用电子计算机程序便解决了问题。

3.3 模型(1)不但体现了赤潮的发展是一个连续的过程,而且可以通过它探讨赤潮发生全过程4个阶段的数量变化规律。由于不同海域、不同赤潮藻类甚至不同季节所定义的赤潮密度临界值 \bar{S} 会有所不同,而且4个阶段的分界值 $E(t_1) \rightarrow S(t_2) \rightarrow E(t_3) \rightarrow S(t_4)$ 也会有所改变,这可以通过选择不同的参数值和 $E(0)$ 、 $S(0)$ 初始值来实现,至于如何具体选取这些参数值仍有待进一步去探讨。

参 考 文 献

钱宏林 梁松 齐雨藻等, 1994. 南海北部沿海夜光藻赤潮的生态模式研究. 生态科学, 1: 39—46
 沈竑 洪君超 张开富等, 1995. 中肋骨条藻(*Shkeletonema Costatum*)赤潮发生过程中微量因素 Fe、Mn 作用的研究. 暨南大学学报, 16(1): 131—136
 王寿松 冯国灿 段美元等, 1997. 大鹏湾夜光藻赤潮的营养动力学模型. 热带海洋, 16(1): 1—6
 齐雨藻 吕颂辉 钱宏林, 1991. 中国的赤潮和赤潮研究. 南京大学学报(自然灾害成因与对策专辑), 353—

360

陈兰荪 陈键, 1993. 非线性生物动力系统. 北京: 科学出版社. 165—170

梁松 钱宏林 黄礼贤, 1989. 大鹏湾盐田至南澳镇沿岸发生赤潮的调查和讨论. 暨南大学学报(赤潮研究专刊), 90—92

邹景忠 董丽萍 秦保平, 1983. 渤海湾富营养化和赤潮问题的初步探讨. 海洋环境科学, 2(2): 41—54

谢健 李锦蓉 吕颂辉等, 1993. 夜光藻赤潮与环境因子的关系. 海洋通报, 12(2): 1—6

MATHEMATICAL SIMULATION OF RED TIDE OCCURRENCE IN A CLOSED ENVIRONMENT

WANG Shou-song, LIU Zi-huang

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

XIA Zong-wan, YU Bin

(South China Sea Branch, State Oceanic Administration, Guangzhou, 510300)

Abstract Based on a continuous cultivation model of microbes with continuous nutrient injection in a nutrition box, a nutrient dynamics model describing the process of red tide occurrence in a closed environment is presented as follows:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = r_1[c_1(E_0 - E) - ag(E)S] \\ \frac{dS}{dt} = r_2[-(\gamma + c_2)S + \varepsilon ag(E)S] \end{cases} \quad (1)$$

where E is the concentration of nutrient and S is the density of algae. Four kinds of nutrient growth functions are analysed and the different effects of nutrient growth speed on the red tide alga growth are compared.

This mathematical simulation method describing the four stages of the whole process of red tide occurrence is discussed by using the qualitative analysis method of differential equations. The numerical computation scheme for differentiation of these stages is as follows: Draw the curves of $\frac{dE}{dt} = 0$ and $\frac{dS}{dt} = 0$, which differentiate the nutrient-alga curve plot into four areas; from the cross points of those two curves and the nutrient-alga curve, the start time for those four stages can be determined.

Key words Red tide Processes of occurrence Nutrient dynamics Mathematical modelling

Subject classification number X172