第 37卷 第 6期
2006年 11月
海 洋 与 湖 沼
OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA
Vol. 37, No. 6
Nov., 2006

局部重力场球冠谐分析中的导数计算及应用*

吴招才 刘天佑 高金耀
(中国地质大学地球物理与空间信息学院 武汉 430074)
(国家海洋局第二海洋研究所 杭州 310012)

提要 在建立局部地区的地球重力场模型中，球冠谐分析是一种有效的方法。在球冠坐标系下建立重力场模型时，仅涉及到重力位的垂向分量，不必进行关于极角的微分运算，所以仅用单个正交基来建模，但若要在球冠坐标系下对重力场作进一步分析，如类似于平面处理的导数运算，来突出地质体的边界，要计算极角的微分，利用单个正交基表示则不易收敛，且误差较大。本文中作者采用两个正交基函数在球冠坐标系下对重力场建模，推导计算了径向导数和曲面导数模，并利用棱柱体正演模型进行检验，结果表明双基函数建模更适合曲面上的位场表示。最后计算了冲绳海槽地区卫星测高重力异常数据的曲面导数，径向导数清晰划分了东海陆架上大构造单元，曲面导数梯度带显示了东海陆架外缘隆起带，也指示了陆架盆地内的一些局部构造。这表明双基函数的球冠谐分析是一种有效的曲面位场建模方法。

关键词 导数计算，球冠谐分析，局部重力场，冲绳海槽
中图分类号 P731.23

Haines(1985a)提出的球冠谐分析方法，对于建立局部区域的位函数和它的空间导数模型，提供了一个良好的手段。三维空间的位函数梯度场及其垂直分量场或球面上的任意标量场，都可以用球冠谐分析来拟合建模。球冠谐分析成功的应用于利用 Magsat卫星数据建立北纬 40度以上区域 (Hanies, 1985b)，及覆盖欧洲 (De *et al*, 1990)、亚洲 (安振昌等, 1998; An *et al*, 1992)的垂直磁异常模型，它还用于建立地磁场长期变化的模型 (Hanies, 1985c; 安振昌等, 2003)。许多国家和地区还用它来建立本地区的参考地磁场模型，如加拿大 (Haines *et al*, 1986; Newiit *et al*, 1989)、意大利 (De *et al*, 1990)、西班牙 (Torta *et al*, 1992)、东亚和中国 (An *et al*, 1994; 安振昌等, 2003)。相关的改进和计算方法也不断的出现 (De, 1991; 彭富清等, 2000; Korte *et al*, 2003)。

球冠谐分析在地磁场分析中的广泛应用促使不少学者试图将其引入到局部重力场的建模中来，国内学者李建成从 Sturm-Liouville型方程本征值出发，以此作为用谱方法研究大地测量边值问题的数学理论，提出了局部重力场的球冠谐分析课题，导出了相应的计算公式，给出了完整的重力场球冠谐分析的数学模型 (Li *et al*, 1995)。此后不断有学者将它用于提取不同波长的重力异常，并探讨阶次和场源深度的对应关系以研究区域或深部构造 (王喜臣等, 1996; 申宁华等, 1998)。

在用球冠谐分析建立局部重力场模型时，由于不用计算对极角的微分，所以仅用单个正交函数基来表示重力场。虽然用单个正交基表示能减少表达式的系数，但也有一些根本性的缺点，若只用 $k-m=$偶数定义的正交基来分析，则对极角求微分的位函数导数只在均方意义下收敛，不能计算对极角逐项导数的和，也由于用单个正交

* 海洋 973项目“中国海沟-弧-盆体系形成演化”子课题资助，G2000046703号。吴招才，博士生，E-mail: dhczw@sohu.com

收稿日期：2005-07-18，收修改稿日期：2006-07-14

基表示时收敛速度慢而不利于对其进行谱分析。此外, 用单个正交基来表示时要强制边界处的某些值为零, 造成的误差也是不可忽略的。尤其对一个三维的拉普拉斯位场 (如不同高度上的磁卫星数据) 或要求进行场数据外推时, 这个问题则很严重。用两个正交函数基表示, 无论是对位场还是它的导数, 都可以快速收敛, 并可以更好的拟合原始数据 (De *et al*, 1997)。

1　球冠谐分析

在局部球冠域中, 设最大极角为 δ_0。球冠上任一点在球冠坐标系下的坐标为 (r, δ, φ), δ为极角, φ为经角 (图 1)。

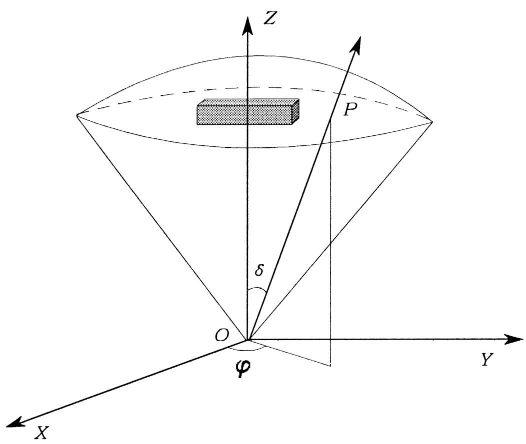

图 1　棱柱体正演模型

Fig. 1　Forward modeling of a prism

对于位函数 V 在球坐标系下和球冠坐标系下展开时, 关于 φ的边界条件一样, 所以, 在球冠坐标系中, m 也是正整数。

对于极角 δ的边界条件, 与球坐标系中不同, 此时的边界条件是 (Haines, 1985a)

$$V(r, \delta_0, \varphi) = f(r, \varphi) \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial V(r, \delta, \varphi)}{\partial \delta}\right|_{\delta=\delta_0} = g(r, \varphi) \tag{2}$$

这两个边界条件可以通过选择基函数 V_v^m 使得

$$V_v^m(r, \delta_0, \varphi) = 0 \tag{3}$$

来满足 (1)式; 通过选择基函数 V_v^m 使得

$$\left.\frac{\partial V_v^m(r, \delta, \varphi)}{\partial \delta}\right|_{\delta=\delta_0} = 0 \tag{4}$$

来满足 (2)式。因为 V_v^m 的表达式中只有缔合勒让德函数 $P_v^m(\cos\delta)$与 δ有关, 故 (3)、(4)两式可等价为

$$P_v^m(\cos\delta_0) = 0 \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial P_v^m(\cos\delta)}{\partial \delta}\right|_{\delta=\delta_0} = 0 \tag{6}$$

当 δ_0 给定时, (5)式和 (6)式变成以正整数 m 为参变量, v 为变量的方程, 可以单独确定一组对应于 m 的 v 值, 故令 $v = v_{k(m)}$, k 为 v的下标变量, 表示 v从小到大的序列, 这里 k选为从 m 开始, 并定义 $k-m=$偶数时由 (6)式求取 $v_{k(m)}$, $k-m=$奇数时由 (5)式求取。故球冠坐标系下的位函数可表达为

$$V(r, \delta, \varphi) = V_{v_{k(m)}}^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} a\left(\frac{a}{r}\right)^{v_{k(m)}+1} P_{v_{k(m)}}^m(\cos\delta)\cdot\left[g_k^m \cdot \cos(m\varphi) + h_k^m \sin(m\varphi)\right] \tag{7}$$

由 Sturm-Liouville 理论, 位函数的基函数是 $V_{v_{k(m)}}^m$ 可以分成两个 $k-m=$偶数和 $k-m=$奇数的无穷列, 这两个基函数列在球冠谐区域上分别正交, 而不同的基函数列之间不正交。

下面简单证明可由 (3)式和 (4)式导出 (1)式和 (2)式。在 $\delta=\delta_0$时将 (3)式代入 (7)式有

$$V(r, \delta, \varphi) = V_{v_{k(m)}}^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=m \\ (k-m)=\text{even}}}^{\infty} a\left(\frac{a}{r}\right)^{v_{k(m)}+1} P_{v_{k(m)}}^m(\cos\delta)\cdot\left[g_k^m \cdot \cos(m\varphi) + h_k^m \sin(m\varphi)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)$$

若将 (1)式的右端 $f(r, \varphi)$进行傅立叶展开, 并将其系数作为上式中的 a_m 和 b_m, 则可令 (1)式成立。类似的, 将 (4)式代入 (7)式同样可令 (2)式成立。

由于 $g = -\frac{\partial V}{\partial r}$, 所以有

$$g = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}(v_k(m)+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{v_{k(m)}+2} P_{v_{k(m)}}^m(\cos\delta)\cdot\left[g_k^m \cos(m\varphi) + h_k^m \sin(m\varphi)\right]$$

这就是重力异常在球冠谐区域内的表达式。

Haines于 1985年提出的球冠谐理论时是由 (3)式来满足 (2)式, 而由 (4)式来满足 (1)式, 因而他用 $k-m=$偶数定义的正交基来表达不必对 δ求微分的位函数导数, 但这与他后面给出的证明式不相符。

若要表达的位函数不必对 δ求微分, 则仅需要 (1)式和 (3)式, 而不用 (2)式和 (4)式, 即用一

个正交函数基列就可表达(常用的是 $k-m=$ 偶数定义的正交基)。虽然这时位函数列收敛速度会影响对 δ的一阶导数在边界处的误差,但它还是会一致收敛的。

2 重力场导数的计算

重力异常的导数作用相当于频率域的高通滤波,可以突出浅部的局部异常边界特征,压制深部的区域地质构造影响。在一定程度上可以划分不同深度和大小异常源产生的叠加异常,且导数的次数越高,分辨能力越强。

在球冠谐坐标系中,对式(7)进行三个方向求导数,有

$$\frac{\partial g}{\partial r}=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}(v_k(m)+1)(v_k(m)+2)\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^{v_k(m)+2} P^m_{v_k(m)}(\cos\delta)\cdot\left[g_k^m\cos(m\varphi)+h_k^m\sin(m\varphi)\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial\delta}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}(v_k(m)+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{v_k(m)+2}\frac{\partial P^m_{v_k(m)}(\cos\delta)}{\partial\delta}\cdot\left[g_k^m\cos(m\varphi)+h_k^m\sin(m\varphi)\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}(v_k(m)+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{v_k(m)+2}P^m_{v_k(m)}(\cos\delta)\cdot m\cdot\left[-g_k^m\sin(m\varphi)+h_k^m\cos(m\varphi)\right]$$

其中的非整阶勒让德函数及其导数按如下公式计算

$$P_v^m(\cos\delta)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(m,k)\cdot\left(\frac{1-\cos\delta}{2}\right)^k$$

当 $m=0$时

$$\frac{dP_v^m(\cos\delta)}{d\delta}=\frac{\sin\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot A_k(m,k)\cdot\sin^{2(k-1)}(\delta/2)$$

当 $m\neq 0$时

$$\frac{dP_v^m(\cos\delta)}{d\delta}=\frac{\sin\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot A_k(m,k)\cdot\sin^{2k-1}(\delta/2)+\frac{m\cdot\cos\delta}{2\cos(\delta/2)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin^{2k-1}(\delta/2)$$

其中

$$A_0=\begin{cases}1 & m=0\\ K_v^m\cdot\sin^m\delta & m\neq 0\end{cases}$$

$$A_k(m,v)=\frac{(k+m-1)(k+m)-v(v+1)}{k(k+m)}\cdot A_{k-1}(m,v)$$

对于 K_v^m 的计算有如下近似公式

$$K_v^m=\frac{2^{-m}}{\sqrt{m\pi}}\left[\frac{v+m}{v-m}\right]^{\frac{v}{2}+\frac{1}{4}}\cdot P^{m/2}\cdot\exp(e_1+e_2)$$

$$P=\left(\frac{v}{m}\right)^2-1,\quad e_1=-\left(\frac{1}{12m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

$$e_2=\frac{1}{360m^3}\left(1+\frac{3}{p^2}+\frac{4}{p^3}\right)$$

3 正演模型与实例

在计算重力异常在球冠曲面上的导数时,用两个正交函数基来表示。为了验证导数计算的正确性,作了一个棱柱体正演模型进行检验,其埋深为 100km,棱柱体为 1000km × 1000km × 200km,中心点在极轴上,剩余密度为 $0.5\times10^3\ kg/m^3$(图 1),其正演重力异常如图(2)所示,对其作 21阶展开,然后求其径向导数(图 3)和曲面导数模(图 4)。图 4中黑框表示模型的平面位置。由正演模型结果可以看出,径向导数的零值线圈出了异常体的范围。而曲面的导数模的梯度带也较好的反映了异常体的边界。由此表明这种计算方法是有效的。

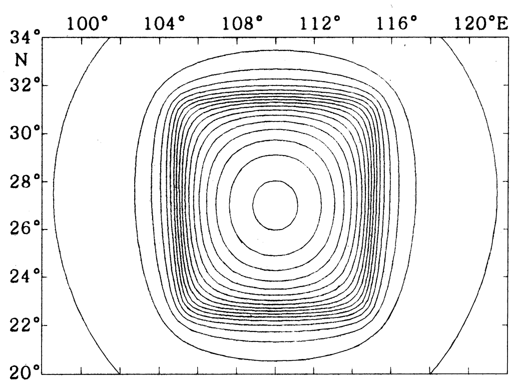

图 2 正演重力异常(单位: mGal)

Fig. 2 Forward modeled gravity anomaly

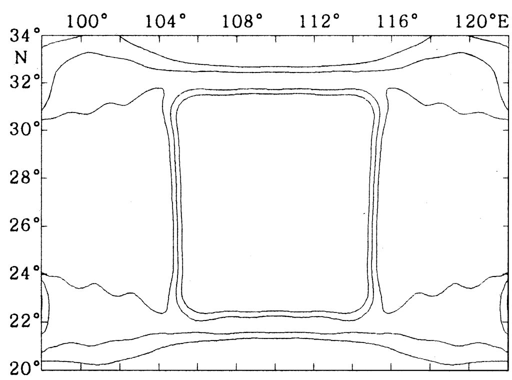

图 3 21阶正演异常径向导数

Fig. 3 The 21st radial derivative of gravity anomaly by forward modeling

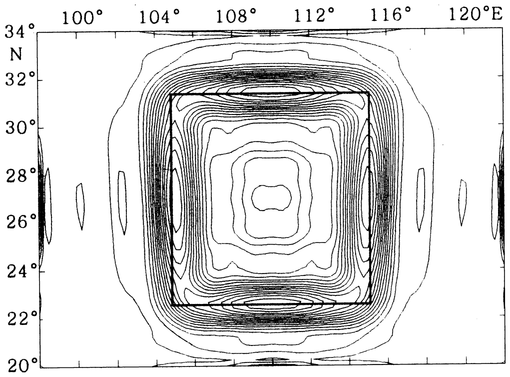

图 4 21阶正演异常曲面导数模

Fig. 4 The 21st spherical surface derivative module of gravity anomaly

本文中作者采用由卫星测高反演的冲绳海槽地区的重力异常数据, 其范围是北纬 23.5°—32.5°, 东经 119.5°—132.5°, 最大极角为 7.38°。将其作 21阶展开, 共 506个系数。对 21阶展开

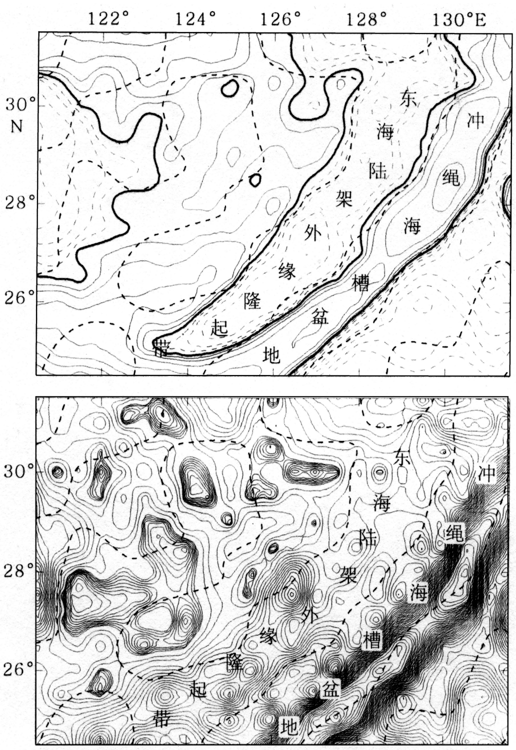

图 5 冲绳海槽地区重力异常计算结果

(图中虚线为负值)

Fig. 5 Mapping of modeled gravity anomaly in the Okinawa Trough (the dashed lines are negatives)

上图: 21阶的径向导数; 下图: 21阶展开的曲面导数模

的重力异常求径向导数和曲面导数模, 其结果如图 5(上图)和图 5(下图)(切除了边界的振荡效应部分)。径向导数更多地反映了地质构造的垂向变化, 由图 5(上图)可以看出径向导数的零值线很清晰地划分出东海陆架上大构造单元(如冲绳海槽等)的范围。曲面导数类似于平面上的水平导数, 反映了地质构造的横向不均匀性。由图 5(下图)可以看到, 曲面导数梯度带不仅显示了东海陆架外缘隆起带和冲绳海槽, 还指示了陆架盆地内的一些局部构造, 图中的虚线为原始重力异常的 4阶小波分解的零值线[1)], 小波分解主要是通过多频率的分解以突出局部细节。可以看出它们具有一定的相似性, 但曲面导数的结果更细致, 原因之一是球冠谐展开求导是严格球面上的计算, 而小波多尺度分解还是在平面直角坐标系下计算的。

由此可见, 在球冠坐标系下进行导数计算, 正演模型和以及在冲绳地区实例计算均表明这种计算方法效果明显, 可以克服传统的平面重磁方法不能处理曲面数据的理论缺陷。

参 考 文 献

王喜臣, 王光杰, 李桐林等, 1996. 利用球冠谐分析方法提取不同波长重力场异常. 世界地质, 15(3): 80—83

申宁华, 王光杰, 王喜臣等, 1998. 球冠谐和分析算法及其在中国大陆航磁异常分析中的应用. 物探化探计算技术, 20(1): 9—18

安振昌, 1992. 地磁场模型和冠谐分析. 地球物理学进展, 7(3): 73—79

安振昌, 谭东海, 1998. 亚洲 MAGSAT 卫星磁异常冠谐分析. 地球物理学报, 41(2): 168—173

安振昌, 2003. 2000年中国地磁场及其长期变化冠谐分析. 地球物理学报, 46(1): 68—72

彭富清, 于锦海, 2000. 球冠谐分析中非整阶 Legendre函数的性质及其计算. 测绘学报, 29(3): 204—208

An Ch, Ma S, Tan D *et al*, 1992. A spherical harmonic model of the satellite magnetic anomaly field over China and adjacent areas. J Geomagn Geoelectr, 44: 243—252

An Ch, Tan D, Xu Y *et al*, 1994. Spherical harmonic model of the geomagnetic field over East Asia. J Geomagn Geoelectr, 46: 789—795

De Santis A, Battelli O, Kerridge D J, 1990. Spherical cap harmonic analysis applied to regional modeling for Italy.

1) 张世晖, 2003. 海洋卫星测高重力数据处理方法研究及在冲绳海槽的应用. 中国地质大学(武汉)博士论文, 1—60

J Geomag Geoelectr, 42: 1019—1036

De Santis A, 1991. Translated origin spherical cap harmonic analysis. Geophys J Int, 106: 253—263

De Santis A, Torta JM, 1997. Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation. Journal of Geodesy, 71: 526—532

Haines G V, 1985a. Spherical cap harmonic analysis. J Geophys Res, 90: 2583—2591

Hanies G V, 1985b. Magsat Vertical field anomalies above 40°N form spherical Cap harmonic analysis. J Geophyes Res, 90: 2593—2598

Hanies G V, 1985c. Spherical Cap harmonic analysis of geomagnetic secular variation over Canada 1960—1983. J Geophyes Res, 90: 12563—12574

Haines G V, Newiit L R, 1986. Canadian geomagnetic reference field 1985. J Geomag Geoelectr, 38: 895—921

Korte M, Holme R, 2003. Regularization of spherical cap harmonics. Geophys J Int, 153: 253—262

Li Jiancheng, Dingbo C, Jinsheng N, 1995. Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation. Manuscr Geod, 20: 265—277

Newiit L R, Haines G V, 1989. Canadian geomagnetic reference field 1987.5. J Geomag Geoelectr, 41: 249—260

Torta JM, Garcia A, De Santis A, 1992. A geomagnetic reference field for Spain at 1990. J Geomag Geoelectr, 41: 249—260

DERIVATIVE CALCULATION AND APPLICATION IN SPHERICAL CAP HARMONIC ANALYSIS OF LOCAL GRAVITY FIELD

WU Zhao-Cai, LIU Tian-You, GAO Jin-Yao

(Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan, 430074)

(The econd Institute of Oceanography, tate Oceanic Administration, Hangzhou, 310012)

Abstract Spherical cap harmonic analysis is an effective method for modeling a local gravity field, in which only the vertical component of gravity potential is calculated, and no differentiation to pole angle is needed; therefore, only one set of orthogonal functions would be required. However, for a further analysis in detail of the internal gravity field in spherical cap coordinates, such as extracting the boundary of the geological body with derivative, as what is done in Cartesian coordinates, the model with single set of orthogonal functions converges slowly with large error; but the model with two sets can do well for the gravity field and its derivative. In this paper, two sets of orthogonal functions were applied to model the local gravity field, and to calculate radial derivative and spherical surface derivative module in spherical cap coordinates. Then a prism model was designed to verify the result. It is shown that the model with two sets of orthogonal functions is more suitable for gravity potential on sphere. Finally, using gravity anomaly data of Okinawa Trough from satellite altimetry, the derivative was calculated applying the two-set algorithm, the tectonic units of the offshore region in the East China Sea were delineated clearly by radial derivative. The spherical surface derivative module marked clearly the East China Sea uplift zone and some other local structural units in sedimentary basin on continental margin. The two-set algorithm of spherical cap harmonic analysis has been proved to be a better approach to gravity field modeling.

Key words Derivative calculation, Spherical cap harmonic analysis, Local gravity field, Okinawa Trough