

# 海湾的潮汐与潮流\*

方国洪 王仁树

(中国科学院海洋研究所) (中国科学院东北海洋工作站)

1921年, Taylor 曾经对海湾的潮汐现象进行过理论研究<sup>[7]</sup>, 所研究的海湾是水深均匀的, 并且是由两平行海岸及一条与它们相垂直的海岸所构成的半无限长的水域, 在研究工作中还忽略了海水所受到的摩擦作用。虽然如此, Taylor 所得到的海湾内的潮波系统图颇能说明某些实际现象。

在实际上, 海湾中的潮波运动是受到摩擦作用的, 这种作用在潮波系统图上表现出最明显之点(这早就为许多海洋学家注意到), 就是在北半球无潮点偏向左岸(如果我们面对湾顶的话), 在南半球则相反。显然, 摩擦对潮波的其他性质也会是有影响的。本文采用了 Taylor 的方法来研究在摩擦作用下海湾的潮汐和潮流, 我们引用下面几个简化的假定:

- (1) 海湾的两岸为相互平行的直线, 湾顶亦为一直线, 且与两岸垂直;
- (2) 海湾的水深是均匀的, 深度比潮汐的振幅要大很多;
- (3) 摩擦力与流速的一次方成比例;
- (4) 柯氏参量在海湾内为一常量;
- (5) 不计作用于海水质量上的引潮力。

## 一、潮波方程的积分

### I. 潮波微分方程及边界条件

由上面的假定可以列出如下的潮波微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - ku, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - kv, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} \text{于 } x = 0, & u = 0, \\ \text{于 } y = \pm \frac{B}{2}, & v = 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$x$  轴——与海湾的轴线重合, 以湾顶指向湾口为正向;

\* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 309 号。本文承郑文振、刘凤树、袁立业等同志审阅并提出宝贵意见, 作者特此表示深切谢意。

$y$  轴——与湾顶重合,它的正向是这样确定的:使  $xoy$  平面以反时针方向旋转为正,如图 1;

$t$ ——时间;

$u$ ——海底到海面的平均潮流流速在  $x$  轴上的分量;

$v$ ——海底到海面的平均潮流流速在  $y$  轴上的分量;

$\zeta$ ——平均海面算起的潮汐高度;

$g$ ——重力加速度;

$h$ ——海湾的水深;

$B$ ——海湾的宽度;

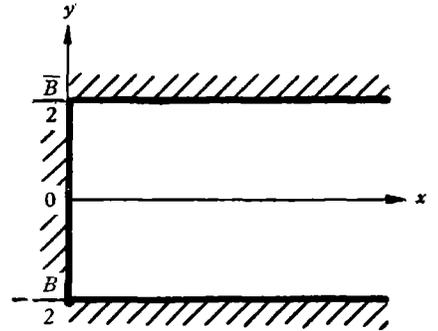


图 1 海湾  
Fig. 1. The gulf.

$f = 2\Omega \sin \varphi$ , 为柯氏参量, 在我们这里看作常量: 其中  $\Omega$  为地转角速率,  $\varphi$  为海湾的平均地理纬度;

$k$ ——摩擦系数。

假定  $u$ 、 $v$ 、 $\zeta$  包含的时间因子为  $e^{i\sigma t}$ , 其中  $i$  为虚数单位,  $\sigma$  为潮波一个分潮的角速率, 则方程(1)可改写为

$$\begin{cases} i\sigma u - fv = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - ku, \\ i\sigma v + fu = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - kv, \\ i\sigma \zeta + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由这个方程不难得到

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2 \left( 1 - i \frac{k}{\sigma} \right)^2 - f^2}{gh \left( 1 - i \frac{k}{\sigma} \right)} \right] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{Bmatrix} = 0, \quad (4)$$

以及

$$(i\sigma + k) \frac{\partial u}{\partial y} - f \frac{\partial u}{\partial x} = (i\sigma + k) \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5)$$

为了简化计算, 引进下列无量纲:

$$\begin{cases} \xi = \frac{\pi}{B} x, \\ \eta = \frac{\pi}{B} y, \\ s = \frac{f}{\sigma}, \\ \mu = \frac{k}{\sigma}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} l = \frac{\pi \sqrt{gh}}{B \sigma}, \\ \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ q = \frac{(1 - i\mu)^2 - s^2}{l^2(1 - i\mu)}. \end{cases}$$

则方程(4)与方程(5)可分别改写为:

$$(\Delta_2 + q) \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{Bmatrix} = 0, \quad (7)$$

以及

$$(i + \mu) \frac{\partial u}{\partial \eta} - s \frac{\partial u}{\partial \xi} = (i + \mu) \frac{\partial v}{\partial \xi} + s \frac{\partial v}{\partial \eta}. \quad (8)$$

而边界条件[式(2)]则可改写为:

$$\begin{cases} \text{当 } \xi = 0, & u = 0, \\ \text{当 } \eta = \pm \frac{\pi}{2}, & v = 0. \end{cases} \quad (9)$$

由于边界条件用流速的量表示要比用潮位的量表示来得简单,所以下面采用与 Taylor 相同的步骤,先来求出满足边界条件的流速的解。

## II. 微分方程的第一组解

暂且不考虑时间因子  $e^{i\sigma t}$ , 取

$$\begin{cases} u_1 = C e^{\alpha\eta + \beta\xi}, \\ v_1 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

代入(7)、(8)式,得

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + q = 0, \\ (i + \mu)\alpha - s\beta = 0. \end{cases} \quad (12)$$

由此方程组可得  $\alpha$  与  $\beta$  的两组解,其中一组是

$$\begin{cases} \alpha = \frac{s}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - i\mu}}, \\ \beta = \frac{i}{l} \sqrt{1 - i\mu}; \end{cases} \quad (13)$$

另一组解则与它仅差一负号。

这里得到  $u_1$  的两组解分别代表两支在摩擦作用下的,传播方向相反的 Kelvin 波。因我们讨论的是海湾的情形,故可取

$$u_1 = \frac{1}{2} U_1 [e^{\alpha\eta + \beta\xi + \theta} - e^{-(\alpha\eta + \beta\xi + \theta)}] = U_1 \text{sh}(\alpha\eta + \beta\xi + \theta). \quad (14)$$

其中  $\theta$  为待定的常量;而系数  $U_1$  为任意的常量,它的模增大或减小多少倍仅仅表示整个海湾各处的潮汐和潮流增大或减小多少倍,其幅角的增减也仅仅引起整个海湾的潮汐和潮流的初相相同的增减,故可取其其实数且等于  $\frac{\pi}{4}$ ,而不影响讨论的一般性。这样,我们

得到的微分方程的第一组解如下:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{4} \operatorname{sh}(\alpha\eta + \beta\xi + \theta), \\ v_1 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

这组解当然满足  $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$  处  $v = 0$  这个边界条件, 但是不满足  $\xi = 0$  处  $u = 0$  这个条件。事实上, 当  $\xi = 0$  时,

$$u_1 = \frac{\pi}{4} (\operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \alpha\eta + \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \alpha\eta). \quad (16)$$

### III. 微分方程的第二组解

现在再来导出另一组满足  $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$  处  $v = 0$  这一边界条件的解。我们的目的是希望由这一组解与第一组解进行适当的组合得到能满足  $\xi = 0$  处  $u = 0$  这一边界条件的解。

此时可令  $v_2$  为下列各组解

$$\begin{cases} D_m e^{-p_m \xi} \sin m\eta, & m = 2, 4, 6, \dots, \\ C_m e^{-p_m \xi} \cos m\eta, & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (17)$$

的迭加, 其中  $p_m$  由方程(7)确定为

$$p_m = \sqrt{m^2 - q}. \quad (18)$$

令

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{-p_m \xi} \cos m\eta + B_m e^{-p_m \xi} \sin m\eta),$$

则由方程(8)知  $A_m$ 、 $B_m$  与  $C_m$ 、 $D_m$  必须满足下列关系式:

$$\begin{cases} \frac{A_m}{B_m} = \frac{i l^2 m p_m}{s}, & \text{当 } m = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{A_m}{B_m} = \frac{is}{l^2 m p_m}, & \text{当 } m = 1, 3, 5, \dots; \end{cases} \quad (19)$$

以及

$$\begin{cases} D_m = \frac{p_m}{m} A_m + \frac{i + \mu}{s} B_m, & \text{当 } m = 2, 4, 6 \dots, \\ C_m = \frac{i + \mu}{s} A_m - \frac{p_m}{m} B_m, & \text{当 } m = 1, 3, 5 \dots. \end{cases} \quad (20)$$

于是我们得到的第二组解是

$$\begin{cases} u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{-p_m \xi} \cos m\eta + B_m e^{-p_m \xi} \sin m\eta), \\ v_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-p_m \xi} \cos m\eta + \sum_{m=2}^{\infty} D_m e^{-p_m \xi} \sin m\eta, \end{cases} \quad (21)$$

其中  $\Sigma'$  表示对  $m$  等于奇数时的量求和,  $\Sigma''$  表示对  $m$  等于偶数时的量求和, 式中  $C_m$  和  $D_m$  依(20)式决定于  $A_m$  和  $B_m$ , 而  $A_m$  和  $B_m$  之间的关系服从于(19)式; 但是所有这些系

数还是待定的。

这一组解满足条件(10),但不满足条件(9),然而适当地选取  $A_m, B_m$  及(15)式中的  $\theta$  值,就能使得  $u_1$  和  $u_2$  的组合

$$u = u_1 - u_2 \quad (22)$$

于  $\xi = 0$  处其值为零。

#### IV. 满足边界条件的解

首先将  $u_1$  值(式(16))于  $\xi = 0$  处展开为 Fourier 级数:

$$u_1|_{\xi=0} = \alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sh} \theta \left[ \frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{\cos m\eta}{\alpha^2 + m^2} \right] + \\ + \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{ch} \theta \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\sin m\eta}{\alpha^2 + m^2}.$$

这里余弦项中的  $m$  为偶数,正弦项中的  $m$  为奇数;而在(21)式中,  $u_2$  的余弦项及正弦项中的  $m$  均为所有的自然数。因此需再引入两组 Fourier 级数,分别将  $\eta$  的奇数倍的余弦函数表达为  $\eta$  的偶数倍的余弦函数的 Fourier 级数,以及将  $\eta$  的偶数倍的正弦函数表达为  $\eta$  的奇数倍的正弦函数的 Fourier 级数,即:

$$n \text{ 为奇数时, } (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi}{4n} \cos n\eta = \frac{1}{2n^2} + \frac{\cos 2\eta}{2^2 - n^2} - \frac{\cos 4\eta}{4^2 - n^2} + \dots,$$

$$n \text{ 为偶数时, } (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{4n} \sin n\eta = \frac{\sin \eta}{1^2 - n^2} - \frac{\sin 3\eta}{3^2 - n^2} + \frac{\sin 5\eta}{5^2 - n^2} - \dots.$$

这样,在  $\xi = 0$  处,  $u_1$  可写为

$$u_1|_{\xi=0} = \alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sh} \theta \left[ \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos 2\eta}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{\cos 4\eta}{\alpha^2 + 4^2} - \dots + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi}{4n} \cos n\eta - \left( \frac{1}{2n^2} + \frac{\cos 2\eta}{2^2 - n^2} - \frac{\cos 4\eta}{4^2 - n^2} + \dots \right) \right\} \right] + \\ + \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{ch} \theta \left[ \frac{\sin \eta}{\alpha^2 + 1} - \frac{\sin 3\eta}{\alpha^2 + 3^2} + \frac{\sin 5\eta}{\alpha^2 + 5^2} - \dots + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \left\{ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{4n} \sin n\eta - \left( \frac{\sin \eta}{1 - n^2} - \frac{\sin 3\eta}{3^2 - n^2} + \frac{\sin 5\eta}{5^2 - n^2} - \dots \right) \right\} \right], \quad (23)$$

其中系数  $a_n, b_n$  待定。又因为

$$u_2|_{\xi=0} = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\eta + B_m \sin m\eta), \quad (24)$$

欲使

$$u_1|_{\xi=0} = u_2|_{\xi=0}, \quad (25)$$

须使(23)式的右边常数项为零,且余弦函数的系数与正弦函数的系数的比值适合于(19)式,即,

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0, \\ \frac{1}{\alpha^2 + m^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{m^2 - n^2} = \frac{i\pi l^2 p_m}{4s} \operatorname{th} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{th} \theta \cdot a_m \quad (m = 1, 3, 5, \dots), \\ \frac{1}{\alpha^2 + m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^2 - n^2} = \frac{i\pi l^2 p_m}{4s} \operatorname{cth} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{cth} \theta \cdot b_m \quad (m = 2, 4, 6, \dots). \end{cases}$$

若令

$$\begin{cases} z = \operatorname{th} \theta, \\ L_m = -\frac{i\pi l^2 p_m}{4s} \operatorname{th} \frac{\alpha\pi}{2}, \\ M_m = -\frac{i\pi l^2 p_m}{4s} \operatorname{cth} \frac{\alpha\pi}{2}. \end{cases} \quad (26)$$

则上式可简写为

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0, \\ \frac{1}{\alpha^2 + m^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{m^2 - n^2} = L_m z a_m \quad (m = 1, 3, 5, \dots), \\ \frac{1}{\alpha^2 + m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^2 - n^2} = -\frac{M_m}{z} b_m \quad (m = 2, 4, 6, \dots). \end{cases} \quad (27)$$

由(27)式就可以确定欲求的  $z$ 、 $a_m$ 、 $b_m$  诸值。譬如用逐步逼近法, 首先由第一个方程, 近似取

$$a_1 \doteq \frac{1}{\alpha^2}, \quad (28)$$

再由第二个方程, 当  $m = 1$  时求得  $z$  的近似值

$$z \doteq \frac{1}{L_1 a_1 (\alpha^2 + 1)} = \frac{1}{L_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)}; \quad (29)$$

再由第三个方程, 当  $m = 2$  时求得  $b_2$  的近似值; 再由第二个方程, 当  $m = 3$  时求得  $a_3$  的近似值等等; 再将近似值代入 (27) 式中就可求得较前一近似值为准确的第二次近似值; ……。一般来说, 如果海湾较狭且水较深, 以致  $l$  比 1 大许多倍的话, 只要计算一、两次就足够准确了, 即使对于海湾很宽且水较浅,  $l$  值接近于 1 的情况, 其收敛速度也是相当快的。

为了计算这些值, Taylor 还运用了一个相当巧妙的方法, 用这个方法可以首先求出  $z$  值, 然后将它代入方程中, 用逐步逼近法得出  $a_m$ 、 $b_m$ 。但是这样做并没有简化计算过程。

求得  $z$ 、 $a_m$ 、 $b_m$  诸值之后, 即可由式(23)、(24)、(25)以及(18)式计算  $A_m$  和  $B_m$ : 当  $m$  为奇数时,

$$\begin{cases} A_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\pi a_m}{4m} \alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sh} \theta, \\ B_m = -i \frac{l^2}{s} m p_m A_m; \end{cases} \quad (30)$$

当  $m$  为偶数时,

$$\begin{cases} B_m = (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{\pi b_m}{4m} \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha \pi}{2} \operatorname{ch} \theta, \\ A_m = i \frac{l^2}{s} m p_m B_m, \end{cases} \quad (31)$$

其中

$$\theta = \operatorname{th}^{-1} \alpha. \quad (32)$$

最后,海湾总的潮流为:

$$\begin{cases} u = u_1 - u_2, \\ v = -v_2, \end{cases} \quad (33)$$

其中

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{4} \operatorname{sh}(\alpha \eta + \beta \xi + \theta), \\ u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{-p_m \xi} \cos m \eta + B_m e^{-p_m \xi} \sin m \eta), \\ v_2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-p_m \xi} \cos m \eta + \sum_{m=2}^{\infty} D_m e^{-p_m \xi} \sin m \eta. \end{cases} \quad (34)$$

这里  $C_m$ 、 $D_m$  由(20)式确定。

求得潮流后,由连续方程[(3)式的第三式]可得

$$\frac{B\sigma}{\pi h} \zeta = i \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right). \quad (35)$$

将(33)和(34)式代入,得

$$\frac{B\sigma}{\pi h} \zeta = \frac{B\sigma}{\pi h} (\zeta_1 - \zeta_2), \quad (36)$$

其中

$$\begin{cases} \frac{B\sigma}{\pi h} \zeta_1 = i \frac{\pi}{4} \beta \operatorname{ch}(\alpha \eta + \beta \xi + \theta), \\ \frac{B\sigma}{\pi h} \zeta_2 = -i \left[ \sum_{m=1}^{\infty} e^{-p_m \xi} \{ p_m A_m \cos m \eta + (p_m B_m + m C_m) \sin m \eta \} + \right. \\ \left. + \sum_{m=2}^{\infty} e^{-p_m \xi} \{ p_m B_m \sin m \eta + (p_m A_m - m D_m) \cos m \eta \} \right]. \end{cases} \quad (37)$$

我们所得的解包含着无穷级数,用它直接来说明潮汐和潮流的性质是困难的。下面首先来计算两个实例。

## 二、实例

### 实例 I.

利用前节的结果,这里计算了两个实例,第一个例子与 Taylor 在他的文章里的实例相应。Taylor 不考虑摩擦作用,取  $f/\sqrt{gh} = 0.7$ ,  $(\sigma^2 - f^2)/gh = 0.5$ 。因此,为了比较起见,在本文的第一个例子中相应地取  $s = 0.814$ ,  $l = 1.162$ 。Taylor 认为这些数值与北海的半日潮情形相当。我们考虑了摩擦作用,取  $\mu = 0.4$ 。

表 1 第一个实例中第二组解的数据  
Table 1. Data of the second solution in the first example.

$n$	$p_m$ [由式(18)]	$L_m$ [由式(26)]	$M_m$ [由式(26)]	$a_m$ [由式(27)]	$b_m$ [由式(27)]	$A_m$ [由式(30), (31)]	$B_m$ [由式(30), (31)]	$C_m$ [由式(20)]	$D_m$ [由式(20)]	$p_m A_m$	$p_m B_m$	$p_m B_m$ $+ m C_m$	$p_m A_m$ $- m D_m$
1	0.868 + $\pm 0.268$	0.365 - $\pm 0.868$	—	2.0308 - $\pm 0.8172$	—	0.0334 + $\pm 0.4866$	0.717 + $\pm 0.168$	-1.159 - $\pm 0.058$	—	-0.101 + $\pm 0.432$	0.577 + $\pm 0.338$	-0.582 + $\pm 0.280$	—
2	1.923 + $\pm 0.121$	—	-0.113 - $\pm 3.162$	—	0.0952 - $\pm 0.0426$	0.001 - $\pm 0.264$	-0.0411 + $\pm 0.0024$	—	-0.006 - $\pm 0.303$	0.035 - $\pm 0.507$	-0.079 - $\pm 0.000$	—	0.047 + $\pm 0.099$
3	2.948 + $\pm 0.079$	0.382 - $\pm 3.031$	—	0.0818 + $\pm 0.0074$	—	0.00238 - $\pm 0.00546$	-0.079 - $\pm 0.037$	0.085 + $\pm 0.039$	—	0.007 - $\pm 0.016$	-0.231 - $\pm 0.116$	0.024 + $\pm 0.000$	—
4	3.961 + $\pm 0.059$	—	-0.544 - $\pm 6.482$	—	0.0110 - $\pm 0.0037$	-0.0031 + $\pm 0.0602$	0.00229 + $\pm 0.00009$	—	-0.0030 + $\pm 0.0623$	-0.016 + $\pm 0.238$	0.009 + $\pm 0.000$	—	-0.004 - $\pm 0.011$
5	4.968 + $\pm 0.047$	0.555 - $\pm 5.117$	—	0.0185 + $\pm 0.0019$	—	-0.00033 + $\pm 0.00075$	0.0308 + $\pm 0.0139$	-0.0316 - $\pm 0.0111$	—	-0.002 + $\pm 0.004$	0.152 + $\pm 0.071$	-0.006 + $\pm 0.000$	—
6	5.974 + $\pm 0.039$	—	-0.902 - $\pm 9.768$	—	0.0032 - $\pm 0.0010$	0.0016 - $\pm 0.0262$	-0.00044 - $\pm 0.00002$	—	0.0016 - $\pm 0.0266$	0.011 - $\pm 0.137$	-0.003 - $\pm 0.000$	—	0.001 + $\pm 0.003$
7	6.977 + $\pm 0.033$	0.746 - $\pm 7.190$	—	0.0069 + $\pm 0.0007$	—	0.000088 - $\pm 0.000199$	-0.0161 - $\pm 0.0072$	0.0163 + $\pm 0.0072$	—	0.001 - $\pm 0.001$	-0.112 - $\pm 0.051$	0.002 - $\pm 0.000$	—
8	7.980 + $\pm 0.029$	—	-1.242 - $\pm 13.05$	—	0.0013 - $\pm 0.0004$	-0.0008 + $\pm 0.0145$	0.000137 + $\pm 0.000007$	—	-0.0008 + $\pm 0.0147$	-0.007 + $\pm 0.116$	0.001 + $\pm 0.000$	—	0.000 - $\pm 0.002$
9	8.982 + $\pm 0.026$	0.943 - $\pm 9.257$	—	0.0032 + $\pm 0.0003$	—	-0.000033 + $\pm 0.000074$	0.0099 + $\pm 0.0045$	-0.0100 - $\pm 0.0045$	—	-0.000 + $\pm 0.001$	0.089 + $\pm 0.041$	0.001 + $\pm 0.000$	—
10	9.984 + $\pm 0.023$	—	-1.576 - $\pm 16.32$	—	0.0007 - $\pm 0.0002$	0.0007 - $\pm 0.0093$	-0.000056 - $\pm 0.000004$	—	0.0007 - $\pm 0.0094$	0.007 - $\pm 0.093$	-0.001 - $\pm 0.000$	—	0.000 + $\pm 0.001$

$\alpha = 0.052 + \pm 0.351, \theta = \text{th}^{-1} \alpha = 0.047 + \pm 0.338。$

第一组解的计算较为简单,其中

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' + i\alpha'' = \frac{s}{l} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2(1+\mu^2)}} + i \frac{s}{l} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2(1+\mu^2)}}, \\ \beta = \beta' + i\beta'' = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2}} + i \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2}}, \end{cases} \quad (38)$$

这里  $\alpha'$  与  $\alpha''$  代表  $\alpha$  的实部与虚部,  $\beta'$  与  $\beta''$  代表  $\beta$  的实部与虚部。在本实例中  $\alpha = 0.662 + 0.128i$ ,  $\beta = 0.169 + 0.877i$ 。而  $\theta$  值可从计算第二组解的过程中得到。

对于第二组解,实例中取了 10 项,即  $m$  从 1 到 10。计算过程中所得的数字如表 1 所示。

利用前面的结果不难算得

$$\begin{cases} \zeta = \zeta' + i\zeta'', \\ u = u' + iu'', \\ v = v' + iv'', \end{cases} \quad (39)$$

其中  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ ,  $u'$ ,  $u''$ ,  $v'$ ,  $v''$  均为实数。引入时间因子  $e^{i\sigma t}$  之后取实部,可得

$$\begin{cases} \zeta = \zeta' \cos \sigma t - \zeta'' \sin \sigma t, \\ u = u' \cos \sigma t - u'' \sin \sigma t, \\ v = v' \cos \sigma t - v'' \sin \sigma t. \end{cases} \quad (40)$$

对于潮汐,高潮发生的时间决定于它的所谓“迟角” $g$ ; 潮差决定于潮汐振幅  $H$ :

$$\begin{cases} g = -\text{tg}^{-1} \frac{\zeta''}{\zeta'}, \\ H = \sqrt{\zeta'^2 + \zeta''^2}. \end{cases} \quad (41)$$

其中  $g$  值以度表示,除以 30 称为潮时,由潮时与振幅分别画出的等值线即所谓同潮时线与等振幅线。图 2 中实线为同潮时线,虚线为等振幅线。

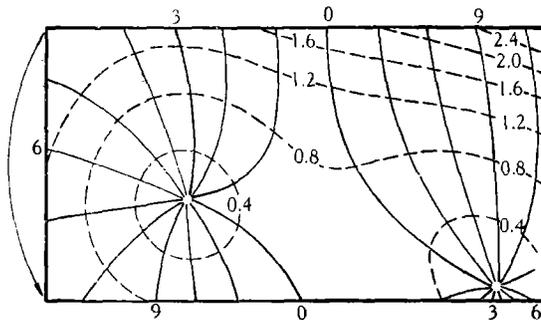


图 2 同潮时线(实线)与等振幅线(虚线)

Fig. 2. Co-tidal lines (full lines) and lines of equal amplitude (dotted lines).  
( $s = 0.814$ ,  $l = 1.162$ ,  $\mu = 0.4$ )

由  $u'$ ,  $u''$ ,  $v'$ ,  $v''$  可以根据公式计算出潮流椭圆的要素,这些公式是:

最大潮流

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2 + \sqrt{(u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2)^2 - 4(u'v'' - u''v')^2}}; \quad (42)$$

最小潮流与最大潮流之比值,即椭圆短半轴与长半轴之比

$$\frac{m}{M} = \sqrt{\frac{u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2 - \sqrt{(u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2)^2 - 4(u'v'' - u''v')^2}}{u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2 + \sqrt{(u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2)^2 - 4(u'v'' - u''v')^2}}}; \quad (43)$$

潮流的旋转方向

$$\begin{cases} \text{当 } u'v'' - u''v' > 0, & \text{顺时针方向,} \\ \text{当 } u'v'' - u''v' < 0, & \text{逆时针方向;} \end{cases} \quad (44)$$

最大潮流的流向

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2(u'v' + u''v'')}{u'^2 + u''^2 - (v'^2 + v''^2)}; \quad (45)$$

最大潮流发生时间决定于角度

$$\tau = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2(u'u'' + v'v'')}{u'^2 - u''^2 + v'^2 - v''^2}. \quad (46)$$

图 3 是根据这些数值画出的潮流椭圆长短轴分布图,图中箭头表示潮流的旋转方向;图 4 是最大潮流  $M$  及其发生时间( $\tau/30$ )的分布图,图中虚线为最大潮流的等值线,或称等最大流速线;实线为最大潮流发生时间的等值线,或简称同潮流时线。

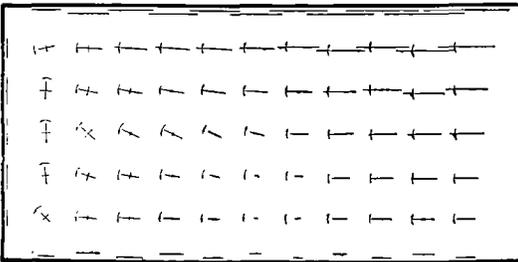


图 3 潮流椭圆之长短轴(箭头表示潮流的旋转方向)  
Fig. 3. The major and minor axes of tidal ellipses  
(the arrows denote the rotational directions of streams).  
( $s = 0.814, l = 1.162, \mu = 0.4$ )

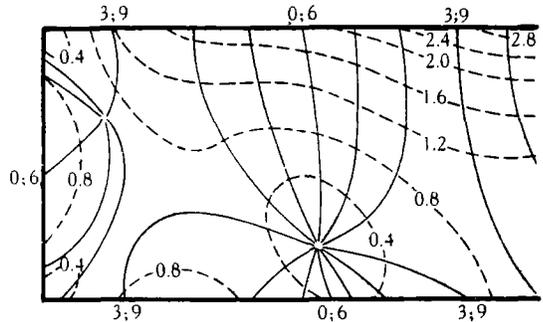


图 4 等最大流速线(虚线)与同潮流时线(实线)  
Fig. 4. Lines of equal maximum velocity (dotted lines)  
and lines of co-tidal streams (full lines).  
( $s = 0.814, l = 1.162, \mu = 0.4$ )

为了检验解的正确性,比较了计算得出的  $u_1$  和  $u_2$  在  $\xi = 0$  处的值。结果指出,两值的差最大为本身  $u_1$  或  $u_2$  的模的 10% 以内,这种差值是由于在第二组解里项数  $m$  取得不够多所致的。我们认为这样的误差不算大,因为  $u_2$  中各项与  $e^{-pm\xi}$  成比例,所以在离湾顶稍远一点的地方其值就很小了;当  $m$  比较大时,尤其如此,因为此时  $p_m$  的实部也较大,而我们略去的也正是这些  $m > 10$  的项。

**实例 II.**

在第二个实例里,取  $s = 0.67, l = 2.4, \mu = 0.4$ 。这些值大约与我国渤海辽东湾的  $M_2$  分潮情况相当。在这个例子里,第一组解的  $\alpha = 0.264 + 0.051i, \beta = 0.082 + 0.425i, \theta = -0.0035 + 0.0262i$ ; 第二组解的数值就不一一列出了。最后所得的结果由图 5—7 表示。

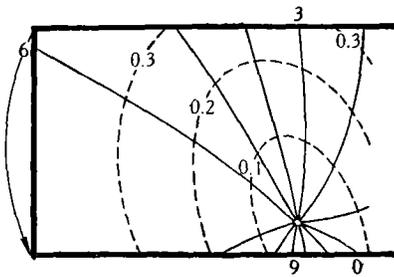


图 5 同潮时线(实线)与等振幅线(虚线)  
Fig. 5. Co-tidal lines (full lines) and lines of equal amplitude (dotted lines).  
( $s = 0.67, l = 2.4, \mu = 0.4$ )

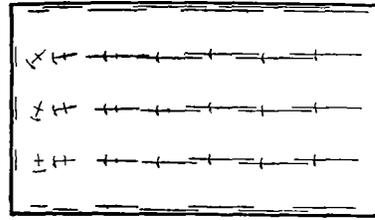


图 6 潮流椭圆之长短轴(箭头表示潮流的旋转方向)  
Fig. 6. The major and minor axes of tidal ellipses (the arrows denote the rotational directions of streams).  
( $s = 0.67, l = 2.4, \mu = 0.4$ )

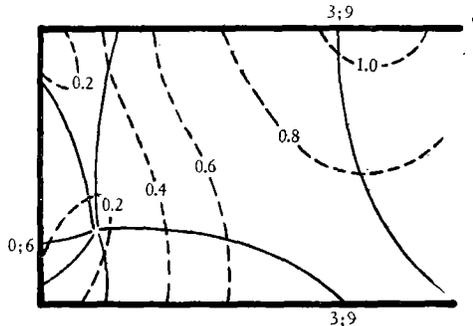


图 7 等最大流速线(虚线)与同潮流时线(实线)  
Fig. 7. Lines of equal maximum velocity (dotted lines) and lines of co-tidal streams (full lines).  
( $s = 0.67, l = 2.4, \mu = 0.4$ )

### 三、討 論

Taylor 在上面提过的文章里曾经指出,在无摩擦情况下,海湾中的 Kelvin 波的完全反射只有在

$$\frac{1 - s^2}{l^2} < 1 \tag{47}$$

时发生。事实上在沟渠的情形,

$$\frac{1 - s^2}{l^2} > 1 \tag{48}$$

这个条件正是 Poincaré 波的存在条件。也就是说,在这样的沟渠里,不仅 Kelvin 波可能存在,同时 Poincaré 波也可能存在。Taylor 的分析说明在这样宽的海湾里, Poincaré 波是必定要存在的。

对于适合条件(48)的海湾,至少要  $l < 1$ , 亦即至少要

$$B > \frac{\pi\sqrt{gh}}{\sigma}$$

如果将这个值与 Kelvin 波的波长  $\lambda = \frac{2\pi\sqrt{gh}}{\sigma}$  比较的话, 则湾宽至少要大于半波长, 对于半日潮波, 若取  $h = 40$  米的话, 则至少  $B > 400$  公里, 若  $h = 4000$  米的话, 则至少  $B >$

4000 公里；对于全日潮波，湾宽还要增大一倍。这样宽的海湾是较少的；并且在这样宽的海湾内潮波的运动必然要复杂得多，本文的简化条件就显得过于理想化。这还是在低纬度的情形，而在较高纬度处，适合条件(48)的海湾的宽度更要大得多；或者甚至根本不可能存在这样的海湾，例如在  $s^2 \geq 1$  处就是如此。

所以，我们下面的讨论将只限于条件(47)成立的情形。

### I. 摩擦作用下的 Kelvin 波

由式(33)、(36)得知，我们所求得的满足边界条件的解是两组解的迭加，第一组解由  $\zeta_1, u_1, v_1(=0)$  所表示，它实际上是一支入射的 Kelvin 波(当然，这里的 Kelvin 波是已经考虑了摩擦后、推广了的 Kelvin 波)和一支反射的 Kelvin 波的迭加。为了了解海湾的潮汐，先来讨论一下摩擦作用下的 Kelvin 波的性质是有益的<sup>1)</sup>。由式(11)，式(6)与式(3)的第三式，不难得到沿  $x$  轴正向传播的一支 Kelvin 波的潮流和潮汐的表示式：

$$\begin{cases} u = C e^{-(ay+bx)+i\sigma t}, \\ v = 0, \\ \zeta = \sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{1-i\mu} C e^{-(ay+bx)+i\sigma t}, \end{cases} \quad (49)$$

其中  $a, b$  可由(13)式与(6)式得出：

$$\begin{cases} a = \frac{f}{\sqrt{gh}} \frac{1}{\sqrt{1-i\mu}}, \\ b = \frac{i\sigma}{\sqrt{gh}} \sqrt{1-i\mu}. \end{cases} \quad (50)$$

或者在(49)式内取实部，得到

$$\begin{cases} u = C e^{-(a'y+b'x)} \cos[\sigma t - (a''y + b''x)], \\ v = 0, \\ \zeta = \sqrt[3]{1+\mu^2} \sqrt{\frac{h}{g}} C e^{-(a'y+b'x)} \cos[\sigma t - (a''y + b''x) - \delta], \end{cases} \quad (51)$$

其中

$$\begin{cases} \delta = \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{\mu}, \\ a' = \frac{f}{\sqrt{gh}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2(1+\mu^2)}}, & a'' = \frac{f}{\sqrt{gh}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2(1+\mu^2)}}, \\ b' = \frac{\sigma}{\sqrt{gh}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2}}, & b'' = \frac{\sigma}{\sqrt{gh}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2}}. \end{cases} \quad (52)$$

在上面诸式中取  $\mu = 0$ ，就得到无摩擦情况下的 Kelvin 波。由上可知，摩擦对 Kelvin 波的各种性质均有影响，今将较重要的几种影响列举如下：

(i) 由于摩擦的作用，潮汐和潮流的振幅(因而能量)随着潮波的向前传播而减小。这从(51)式可以看出，振幅不但与  $y$  有关(这一点在无摩擦情况下亦如此，但摩擦对其量值

1) 关于这种波的性质，文献[4]曾进行过讨论，但较简单，且有错误。

有影响),而且与  $x$  有负指数的关系。 $x$  的系数  $b'$  将称为振幅的衰减指数,显然这个量值越大就说明潮波传播时衰减得越迅速,越小则衰减得越缓慢。下面将着重讨论这个量与水深  $h$  及潮波角速度  $\sigma$  的关系。

根据 Taylor 对爱尔兰海的潮汐摩擦的研究<sup>[6]</sup>,单位面积海底摩擦力  $F_b$  是与流速的平方成比例的,而该力的方向应当与潮流的方向相反,即

$$F_b = -K\rho|u|u, \quad (53)$$

其中  $K$  为常量, Taylor 认为它大约等于 0.002。当然平均单位质量海水所受到的摩擦力  $F$  应当等于  $F_b/\rho h$ 。如果以  $u = U \cos \sigma t$  代入上式,再展开为 Fourier 级数,取其第一项,便得<sup>[3]</sup>

$$F = -ku. \quad (54)$$

这就是方程(1)中的摩擦力项,其中  $k$  值与水深  $h$  及最大流速  $u$  有关,

$$k = r \frac{U}{h}, \quad (55)$$

而  $r$  可认为是常系数

$$r \doteq 0.0024.$$

如果上面这些结果正确的话,就可得到

$$b' = \frac{\sigma}{\sqrt{gh}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(r \frac{U}{\sigma h}\right)^2} - 1}{2}}. \quad (56)$$

由此可知,衰减指数  $b'$  依赖于最大潮流  $U$ ,水深  $h$  及潮波角速度  $\sigma$ ; 并且容易看出,  $b'$  随着  $h$  的减小而急遽增加,同时随  $U$  的增大而增大;但是它与  $\sigma$  的关系不太明显。表 2 是在

表 2  $b' \times 10^3$  (公里<sup>-1</sup>)  
Table 2.  $b' \times 10^3$  (km<sup>-1</sup>).

$h$ (米)	3	5	10	20	40	60	80	100	150	200
全日潮	24	14	6.4	2.7	1.0	0.57	0.37	0.27	0.15	0.10
半日潮	33	18	7.6	2.9	1.1	0.58	0.38	0.27	0.15	0.10

不同水深情况下,半日潮和全日潮的  $b'$  值。表中取  $r = 0.0024$ ,  $U = 0.7$  米/秒,全日潮之  $\sigma = 0.7 \times 10^{-4}$  秒<sup>-1</sup>,半日潮之  $\sigma = 1.4 \times 10^{-4}$  秒。由表中可以看出,  $b'$  随着  $h$  的增大而迅速减小,对全日潮,在  $h = 100$  米时,潮波传播一千公里之后潮波振幅减至 3/4 左右,但是在  $h = 10$  米时,则减至 1/60;而在同样的水深和同样的最大流速的情况下,摩擦对潮能的消耗几乎与潮波本身的周期无关,只是在水特别浅时可以看出短周期潮波衰减得较快<sup>1)</sup>。

(ii) 由于摩擦的作用, Kelvin 波的同潮时线不再与传播方向垂直。如果我们面向潮波的传播方向的话,则在北半球,它要在右岸偏向,南半球则相反,偏向的角度为

1) 这里(下面也同样)假定了  $k$  值与潮波角速率  $\sigma$  无关。关于  $k$  与  $\sigma$  的关系目前尚不十分清楚。一般来说,由于  $\sigma$  增大而导至速度梯度的增大将会使摩擦力增加;但是 Taylor 的工作<sup>[6]</sup>表明,潮流中的摩擦与河流中的摩擦情况相近,这说明(至少在浅海中是如此)摩擦力与  $\sigma$  的关系是不密切的,因为对于定常的河水流动,可认为  $\sigma = 0$ 。Ваняр<sup>[4]</sup>认为  $k$  与  $\sigma$  之间存在着正比的关系似乎是缺乏根据的。

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a''}{b''} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}{\mu \sqrt{1 + \mu^2}} s. \quad (57)$$

可见在高纬度处偏转较大, 在低纬度处则较小。同时当  $\mu \rightarrow 0$  或  $\mu \rightarrow \infty$  时,  $\psi \rightarrow 0$ ; 当  $\mu = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{2} \approx 1.27$  时,  $\psi$  达到最大, 此时  $\psi = \operatorname{tg}^{-1} 0.3s$ 。因此, 对半日潮,  $\psi < 17^\circ$ ; 对全日潮,  $\psi < 31^\circ$ 。

(iii) 最大流速不再在高潮时刻到达, 而是发生于高潮之前。这表现于式(51)中的相角差  $\delta$ , 而  $\delta$  的量值决定于式(52)。由(52)式可知,  $\delta$  仅与  $\mu$  有关, 当  $\mu \rightarrow 0$  时, 即无摩擦时,  $\delta \rightarrow 0$ ; 而当  $\mu \rightarrow \infty$  时, 即摩擦非常大时,  $\delta \rightarrow 45^\circ$ 。由此可知, 在一般情况下最大流速均于高潮前发生, 但超前的时间不会到达  $1/8$  周期。

(iv) 在同样的潮汐振幅的情况下, 由于摩擦的作用, 潮流将减小。在无摩擦情况下的 Kelvin 波, 若潮汐振幅为  $H$ , 则潮流的振幅为  $\sqrt{\frac{g}{h}} H$ ; 但是在摩擦作用下, 若潮汐振幅为  $H$ , 则潮流的振幅应为  $(1 + \mu^2)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{g}{h}} H$ 。但是如果  $\mu$  不太大的话, 因子  $(1 + \mu^2)^{-\frac{1}{4}}$  将接近 1。例如  $\mu = 0.5$ ,  $(1 + \mu^2)^{-\frac{1}{4}} = 0.95$ ;  $\mu = 1.0$ ,  $(1 + \mu^2)^{-\frac{1}{4}} = 0.84$ 。

(v) 摩擦作用使得 Kelvin 波的波长变短, 因而同时使得波速减小。波长  $\lambda$  与波速  $c$  由下式确定:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2\pi}{b''} = \frac{2\pi\sqrt{gh}}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1 + \mu^2} + 1}}, \\ c = \frac{\sigma}{b''} = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1 + \mu^2} + 1}}. \end{cases} \quad (58)$$

$\mu = 0$  时就得到理想流体中 Kelvin 波的公式。当  $\mu$  较小时, 上式中因子  $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1 + \mu^2} + 1}}$  接近于 1。例如  $\mu = 0.5$  时, 为 0.97;  $\mu = 1$  时, 为 0.91。

## II. 海湾中 Kelvin 波的反射

如上所述, 潮波方程的第一组解是两支传播方向相反的 Kelvin 波的迭加, 逆  $x$  轴正向传播的称为入射波, 顺  $x$  轴正向传播的称为反射波。这两支波除了强弱不同外, 其性质是相同的, 这已经在上面讨论过。可以认为反射波是由于自外海传入的 Kelvin 波在遇到湾顶以后遭到反射所生成的。有人曾简单地认为在湾顶处两支潮波的潮汐是振幅相同、位相相同的, 可是实际情况是这只有在无柯氏力作用时情况才完全如此。下面为了简单起见, 只讨论无摩擦的情形, 即  $\mu = 0$  的情形。

在没有地转偏向力作用时, 即方程(1)中的  $f = 0$  时, 我们也能够得到一支入射的和一支反射的波, 这两支波于湾顶处就潮汐而言, 位相是相同的, 就潮流而言, 则位相是相反的。故从形式上来看, 对于潮汐, 波长没有损失, 而对于潮流则出现了所谓“半波损失”。可是在考虑了柯氏力的作用之后, 情况就复杂得多了, 这时在反射的过程中又出现了一种波长损失。这种损失表现于式(14)中出现的  $\theta$  的虚数部分  $\theta''$ 。因为在湾顶的中心处

( $\xi = 0, \eta = 0$ ), 两波的位相差较无柯氏力作用时增加了  $2\theta''$ , 故新出现的波长损失为  $2\theta''/b''$ 。为简便计, 下面只讨论位相损失  $2\theta''$  的一半  $\theta''$  的情况。

在满足条件(47)的情况下,  $\theta$  值一般不很大, 这时参照(29)式, 以

$$\theta \doteq \frac{1}{L_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)} \quad (59)$$

来大致地代替正确的表达式, 因正确式相当复杂, 不能用有限形式表示。将式(26)与式(13)代入, 并取  $\mu = 0$ , 得到

$$\theta'' = \frac{4s^3}{\pi l(l^2 + s^2)\sqrt{l^2 + s^2} - 1 \operatorname{th} \frac{\pi s}{2l}} \quad (60)$$

这个式子仍然是复杂的, 表3列出了  $l = 1, 2, 4$  三种情形下不同  $s$  值所造成的位相损失。由表3可知  $l$  不变时,  $\theta''$  随  $s$  的增加而增加。在  $s \rightarrow 0$  时, 由式(60)知,  $\theta'' \rightarrow 0$ ; 而

表3  $\theta''$  (度)

Table 3.  $\theta''$  ( $^\circ$ )

$l \backslash s$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
1	4.6	9.2	18	26	34	40	45	49	53	56	59
2	0.1	0.3	1.0	2.2	3.8	5.6	7.5	9.4	11	13	15
3	0.01	0.03	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	1.4	1.7	2.1	2.6

对同样的  $s$  值,  $\theta''$  随  $l$  的增加而迅速减小, 由  $l$  的定义(见(6)式)知水越浅, 湾越宽, 位相损失越大。

由式(60)还可看出  $\theta''$  是  $s$  的偶函数, 即如果  $l$  相同的话, 在北半球和南半球同样纬度的地方, 位相损失相同。

### III. 海湾中潮汐和潮流的分布

从图2和图5以及图4和图7中可看到的最引人注目的是同潮时线以及同潮流时线分别在几个特殊的地方会合。同潮时线的会合点一般被称为无潮点; 同潮流时线的会合点我们将称它为圆流点。在前一个点, 对所讨论的分潮而言, 高潮和低潮的发生时间是不确定的, 就是说不存在高潮和低潮, 在这里, 该分潮的潮汐振幅是零。在后一点, 不存在最大潮流发生时间, 也就是不存在最大潮流和最小潮流; 但不能说该点的潮流振幅为零, 实际上, 一般来说在该点潮流并不为零, 不过其大小不随时间变化, 即潮流椭圆变为一个圆。

Taylor 曾经指出<sup>[7]</sup>: 当条件(47)满足时, 如果不考虑摩擦, 海湾里 Kelvin 波的完全反射能够发生。这就是说, 潮波方程的第二组解只在湾顶附近比较重要, 在离湾顶较远处其大小即趋于零。所以可以认为无潮点是这样形成的: 当两支传播方向相反的 Kelvin 波迭加时, 在两波的位相相反, 振幅相同的点, 潮汐互相抵消而形成无潮点。在无摩擦情形下, 入射波与反射波的强度是相同的, 前者右边振幅大(在北半球, 且观察者面朝湾顶), 后者左边振幅大, 振幅相等的点必在湾的轴线上, 所以此时无潮点也总是在湾的轴线上。而在实际存在摩擦的情况下, 由于摩擦损耗能量, 反射波要比入射波来得弱, 这样振幅相同的点就偏向湾轴的左边。同时, 越是远离湾顶, 入射波就越强, 而反射波则越弱, 因而无潮点

也偏离得越是厉害,图 2 中两个无潮点的位置也证明了这个结论。在某些情况下,由于摩擦消耗的能量太多,反射波太弱,就可能不形成无潮点,此时同潮时线表现出类似于前进波的特点;但反射波对它有一定的影响:在两波位相相反处附近出现左边同潮时线较右边密集的现象。因此,我们可以说,无潮点是由柯氏力引起的,而无潮点的偏离湾轴是由摩擦力引起的。

下面我们对无潮点的位置作一数量上的粗略讨论。

由于海湾中的振动是由两支 Kelvin 波和许多不同节距的横向定振迭加起来的,所以不可能用简单而完全精确的公式来表示无潮点的位置。但是可以找出它的近似位置  $(\xi_0, \eta_0)$ ,  $\xi_0$  越大,  $l$  越大,这个公式的偏差越小。

由(36)、(37)式忽略  $\xi_2$ , 知  $\zeta = 0$  必须有

$$\operatorname{ch}(\alpha\eta_0 + \beta\xi_0 + \theta) = 0, \quad (61)$$

或

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(\alpha'\eta_0 + \beta'\xi_0 + \theta') \cos(\alpha''\eta_0 + \beta''\xi_0 + \theta'') = 0, \\ \operatorname{sh}(\alpha'\eta_0 + \beta'\xi_0 + \theta') \sin(\alpha''\eta_0 + \beta''\xi_0 + \theta'') = 0. \end{cases} \quad (62)$$

其中第一式的第一项总是等于或大于 1, 故第二项为零, 即

$$\alpha''\eta_0 + \beta''\xi_0 + \theta'' = \frac{2n+1}{2}\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (63)$$

将它代入后一式, 知其第一项必为零, 故

$$\alpha'\eta_0 + \beta'\xi_0 + \theta' = 0. \quad (64)$$

由上面两式解出

$$\begin{cases} \xi_0 = l \left\{ \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - \theta'' \right] \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2+1}}{2}} + \theta' \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2-1}}{2}} \right\}, \\ \eta_0 = -\frac{l}{s} \left\{ \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - \theta'' \right] \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2-1}}{2}} + \theta' \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2+1}}{2}} \right\} \sqrt{1+\mu^2}. \end{cases} \quad (65)$$

或根据(6)式, 得出

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{gh}}{\sigma} \left\{ \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - \theta'' \right] \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2+1}}{2}} + \theta' \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2-1}}{2}} \right\}, \\ y_0 = -\frac{\sqrt{gh}}{f} \left\{ \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - \theta'' \right] \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2-1}}{2}} + \theta' \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2+1}}{2}} \right\} \sqrt{1+\mu^2}. \end{cases} \quad (66)$$

在  $x_0$  的表达式里包含  $\theta'$  的一项是很小的量, 在  $y_0$  的表达式里包含  $\theta'$  的一项稍大一些, 但是粗略地也可忽略掉。故近似地有

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{gh}}{\sigma} \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - \theta'' \right] \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2+1}}{2}}, \\ y_0 = -\frac{\sqrt{gh}}{f} \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - \theta'' \right] \sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2-1}}{2}} \sqrt{1+\mu^2}. \end{cases} \quad (67)$$

由此可见第一个无潮点( $n=0$  时)离湾顶的距离并不正好等于无摩擦时 Kelvin 波的  $1/4$  波长, 也不等于有摩擦时 Kelvin 波的  $1/4$  波长; 即使略去  $\theta''$  后, 情况仍然如此。但是在  $\mu$  不特别大时,  $x_0$  值差不多与水深的平方根及潮波的周期成正比。同时  $x_0$  与  $\theta''$  有关,

这说明湾宽以及柯氏参量对无潮点位置也有影响。无潮点偏离湾轴的距离  $y_0$ , 当  $\mu = 0$  时等于零, 当  $\mu \neq 0$  时恒为负值, 即摩擦使北半球的无潮点左偏(如面朝湾顶), 使南半球的右偏。同时  $y_0$  值与  $f$  差不多有反比关系, 这说明在低纬度海区偏离得较厉害, 同时也就是在低纬度区比较不容易形成无潮点; 而在  $f = 0$  时, 即如果没有柯氏力的作用就不存在无潮点。

(67)式所代表的点正好位于一条直线之上, 这条直线是

$$y = -\gamma x, \quad (68)$$

其中

$$\gamma = \frac{\sigma}{f} \frac{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (69)$$

(68)式说明直线通过湾顶, 其斜率为  $\gamma$ 。而由(69)式知斜率  $\gamma$  与柯氏参量  $f$  成反比, 即在低纬度处斜率大, 高纬度处斜率小; 同时显然摩擦越大,  $\gamma$  亦越大; 但是  $\gamma$  与  $\sigma$  的关系尚需作如下进一步地讨论。

将(69)式中  $\mu$  代以  $k/\sigma$  [见(6)式], 得

$$\gamma = \frac{1}{fk} \sqrt{\sigma^2 + k^2} (\sqrt{\sigma^2 + k^2} - \sigma). \quad (70)$$

表4  $\gamma$  值

Table 4. The values of  $\gamma$ .

$k \times 10^4$ (秒 <sup>-1</sup> )	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
全日潮	0.05	0.10	0.28	0.64	1.5	4.4	9.3
半日潮	0.05	0.10	0.26	0.55	1.3	3.9	8.8

表4为取  $f = 1 \times 10^{-4}$  秒<sup>-1</sup> 时上式对于不同  $k$  值的半日潮(取  $\sigma = 1.4 \times 10^{-4}$  秒<sup>-1</sup>) 和全日潮(取  $\sigma = 0.7 \times 10^{-4}$  秒<sup>-1</sup>) 的  $\gamma$  值。由表可知  $\gamma$  随着  $k$  值的增加而迅速增加, 但它与潮波周期的关系不大, 一般来说, 在同样  $k$  值情况下, 半日潮的  $\gamma$  值比全日潮的  $\gamma$  值稍小。

将这里计算得出的图2和图5与许多根据实测资料画出的潮波系统图(例如 Proudman 和 Doodson 对北海的工作<sup>[5]</sup>, 小仓伸吉对渤海和北黄海的工作<sup>[1]</sup>)比较, 两者是颇为符合的。但这里尚需说明一下, 北海比辽东湾要深几倍, 何故在两个实例中均取  $\mu = 0.4$ ? 事实上, 对于北海的半日潮,  $\mu$  要小于 0.4。在北海, 因摩擦而消耗的能量并不是潮波损失的能量的全部, 因为还有一部分能量传向了斯卡格拉克海峡(Skagerrak Strait)和弗列密什湾(Flemish bight)。

过去对于圆流点的了解是不多的。在这个点, 潮流椭圆变为一个圆, 这里不存在最大潮流的方向和发生时间等等。所以, 由潮流椭圆要素的计算公式知, 在这个点有

$$\begin{cases} u' \pm v'' = 0, \\ u'' \mp v' = 0. \end{cases} \quad (71)$$

潮流按反时针方向旋转时, 式中取上一符号, 潮流按顺时针方向旋转时, 取下一符号。利用这两个条件可以在所考虑区域中分别画出两条曲线, 其交点即为圆流点。在实例中求得的圆流点如图4和图7。在前一图中有两个, 后一图中有一个。第一个圆流点位于第一个无潮点和湾顶之间, 这个圆流点是6条同潮时线的交汇之处; 第二个圆流点位于第一个和第二个无潮点之间, 偏向湾轴的左边, 这个圆流点是12条同潮时线交汇之处。

本文所获得的潮汐和潮流的分布概况与 Taylor 无摩擦的情况<sup>[7]</sup>的不同处主要有：(i) 由于反射波较入射波弱，潮汐和潮流的振幅右岸比左岸大；(ii) 由于入射波向前传播时能量消耗了，与无摩擦情况相比，如果在湾口潮汐和潮流的振幅相同，在湾顶处的振幅则较无摩擦时小；(iii) 也由于摩擦对能量的消耗，在右岸，入射波与反射波振幅相差比在左岸大，故在右岸比左岸具有较强的前进波性质。

从上面可以看到，本文在导出微分方程的解的时候，只考虑了湾顶及两岸的边界条件，而并未涉及湾口的条件，而对于实际的海湾，外洋的潮波运动情况必然会影响到海湾的潮波运动。同时本文得出的横振动只在湾顶附近显著，在离湾顶较远处即非常微小，这一点与实际恐亦有一定的出入，这主要是因为实质上在上面已经假定了海湾的两岸是半无限长的，从而限制了横向振动的开展，而实际海湾的长度总是有限的，对于有限长的海湾情况必然要复杂得多。

本文的另一不足之处是在考虑边界条件时只取流速的法向分量为零，而没有考虑海岸对海水的粘滞作用，同时海水的侧向涡动对潮波运动的影响亦未予考虑。最后，由(55)式知方程组(1)中的  $k$  值实际上应当与最大流速  $U$  有关，即因地点不同而不同，由此可见，本文运动方程中取摩擦力与流速一次方成比例，也是相当粗糙的。

### 参 考 文 献

- [1] 小仓伸吉, 1936. 黄海北部的潮汐(管秉贤译) 1958. 海洋与湖沼, 1(2):255—268.  
 [2] 山东海洋学院水文气象系编, 1964. 潮汐学(油印本讲义).  
 [3] 普劳德曼, J., 1953. 动力海洋学(毛汉礼译) 1956. 科学出版社, 329—330 页.  
 [4] Вапняр, Д. У., 1960. Влияние трения на приливные явления мелководных районов. Труды ГОИНа 53: 5—58.  
 [5] Doodson, A. T. and H. D. Warburg, 1941. Admiralty Manual of Tides. London, His Majesty's stationary office, p. 205.  
 [6] Taylor, G. I., 1919. Tidal friction in the Irish Sea. *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, 220:1—93.  
 [7] Taylor, G. I., 1921. Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins. *Proc. London. Math. Soc., Ser. 2*, 20:148—81.

## TIDES AND TIDAL STREAMS IN GULFS

FANG GUO-HONG

(Institute of Oceanology, Academia Sinica)

WANG JEN-SHU

(North-east Station of Oceanology, Academia Sinica)

### ABSTRACT

The tides and the tidal streams in gulfs are studied in this paper. The authors have calculated two semi-diurnal tidal waves which correspond to those in North Sea (Fig. 2—4) and Liaodong Bay (Fig. 5—7) respectively. These studies are based on the supposition that the friction is proportional to the velocity, and therefore, the results should be more approximate to reality than the results obtained by G. I. Taylor<sup>[7]</sup>, in which the effects of friction have been ignored.

In this paper, the effects of friction on the Kelvin wave, the reflection of Kelvin wave in a gulf, the positions of the no-tide points (or the amphidromic points) and the circular-stream points, and the distributions of tides and tidal streams in gulfs are also discussed.