

潮汐摩擦的非线性效应(I)*

方 国 洪

(中国科学院海洋研究所)

自从 Taylor (1919) 根据在河渠中的观测结果,论证了潮流的摩擦规律以来,摩擦力比例于流速平方这个规律已为潮汐工作者所承认和采用。而利用这个规律所作的计算,通常也都能得到与实际相符合的结果。因此我们可以认为这个规律是接近实际的。而这个平方关系必然会导至潮波运动的某种非线性效应;同时它对于非摩擦的非线性行为也会造成影响。然而长久以来,人们很少仔细研究过摩擦的非线性效应;同时,在考虑非摩擦的非线性效应时,也总是忽略了摩擦的影响。直到 1971 年, Gallagher 和 Munk 才对这些问题给以较系统的研究,并且得到一些有意义的结果。但我们认为,对于这个问题的进一步分析仍然是需要的,以给出摩擦非线性效应的基本特征的更明确和清晰的阐述。这里面主要有两个问题需要解决,第一是在多个潮波情况下,对平方摩擦项进行 Fourier 展开;第二是在考察源潮波的传播和浅水潮波的成长时,要考虑摩擦的影响。我们将试图在这两方面作出改进。

在本文中,我们着重讨论平方摩擦项的 Fourier 展开。

一、关于潮汐方程

对于在均匀沟渠中传播的潮波,我们将其微分方程取作

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\gamma}{h} |u|u = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta u)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

式中 g 为重力加速度; h 为未受扰动时的水深,假定不随地点 x 变化; t 表时间; ζ 为相对于未扰动海面的潮高; u 为海面到海底的平均流速; γ 为平方摩擦系数,假定为常量。本来,摩擦力项应当是 $\frac{\gamma}{h + \zeta} |u|u = \frac{\gamma}{h} |u|u - \frac{\zeta}{h} \frac{\gamma}{h} |u|u + \dots$, 在式(1.1)中只取了其中第一项,后面小项的影响是非实质性的,我们在第五节中将把它作为订正项予以考虑。

式(1.1)中 $\frac{\gamma}{h} |u|u$ 称为摩擦非线性项,而 $\partial \frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial(\zeta u)}{\partial x}$ 将称为非摩擦非线性项。下面我们先对这两种非线性的相对大小作一大概的比较。

摩擦力 $\frac{\gamma}{h} |u|u$ 实际上只是部分地非线性的,因为它与 u 具有颇高的线性相关,它的

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 529 号。本工作的摘要曾于 1977 年 6 月在为美国科学代表团访问青岛而举行的报告会上宣读。毛汉礼教授对于本项工作给予热情支持和鼓励,作者谨表深切谢意。
本刊编辑部收到稿件日期: 1979 年 10 月 25 日。

非线性部分可用

$$\varepsilon_f^2 = \left(\frac{\gamma}{h}\right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (|u|u - au)^2 dt \quad (1.2)$$

来量度, a 与 t 无关, 由条件 ε_f^2 取最小, 即 $\frac{d\varepsilon_f^2}{da} = 0$ 确定。由于 $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\zeta \frac{\partial u}{\partial x}$ 等非摩擦非线性项与 ζ 或 u 线性无关, 故可以用

$$\varepsilon_{nf}^2 = 9 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dt \quad (1.3)$$

来量度。式中系数 9 是因为考虑到连续方程中 $u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ 和 $\zeta \frac{\partial u}{\partial x}$ 在产生非线性效应时起着

与 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 相同的作用 (参看 Lamb, 1932, p.281)。对不同地点, 两种非线性之比 $\rho = \varepsilon_{nf}/\varepsilon_f$ 将有所不同。作为一个大约的估计, 我们可以考虑一种最简单的, 即一个振幅不变的前进波的情形。此时有 $u = U \cos(\sigma t - \beta x)$, $\beta = \frac{\sigma}{\sqrt{gh}}$, 我们得到 $\varepsilon_f^2 = \left(\frac{\gamma}{h}\right)^2 \left(\frac{3}{8} U^4 - \frac{8}{3\pi} a U^3 + \frac{1}{2} a^2 U^2\right)$ 。当 $a = \frac{8}{3\pi} U$, ε_f^2 具有最小值: $\frac{1}{72\pi^2} \left(\frac{\gamma}{h}\right)^2 (27\pi^2 - 256) U^4$ 。而

$$\varepsilon_{nf}^2 = \frac{9}{2} \frac{\sigma^2}{gh} U^4,$$

因而

$$\rho = \frac{\varepsilon_{nf}}{\varepsilon_f} = \frac{18\pi}{\sqrt{27\pi^2 - 256}} \frac{\sigma}{\gamma} \sqrt{\frac{h}{g}} = 17.5 \frac{\sigma}{\gamma} \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (1.4)$$

图 1 绘出了半日潮 ($\sigma = 1.4 \times 10^{-4}$ 秒⁻¹) ρ 与 γ , h 之间的关系。在图的左上方, $\rho < 1$, 以摩擦非线性为主; 右下方则 $\rho > 1$, 以非摩擦非线性为主。

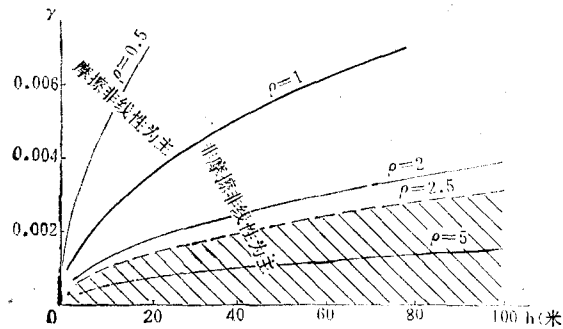


图 1 非摩擦非线性与摩擦非线性之比 ρ 与水深 h 及平方摩擦系数 γ 之间的关系。阴影区域表示在该条件下激波可能发生。

Fig. 1. The ratio ρ of non-frictional nonlinearity to frictional nonlinearity with relation to the depth h and quadratic friction coefficient γ for semidiurnal waves. The shaded area shows that the occurrence of shock wave is possible under that condition.

为了求得方程 (1.1) 的解, 我们可以对它进行 Fourier 变换。不过潮汐谱是离散的线谱, 方程 (1.1) 可以写成由许多余弦函数迭加起来的 Fourier 级数的形式, 然后对每一个频率 σ_n , 可以得出一个不包含时间 t 的方程。这样, 问题只是要对这些方程求解。非摩

擦非线性项的 Fourier 展开非常简单,但摩擦非线性项的展开却颇为困难,下面一节我们专门来讨论这个问题。

二、 $|u|u$ 的 Fourier 展开

1. 一波

在仅仅考虑一个潮波,即当

$$u = U \cos \phi = U \cos(\sigma t - \phi), \quad (U > 0, \sigma > 0) \quad (2.1)$$

时, $|u|u$ 的 Fourier 展开是容易的,这时有(例如参看 Dronkers, 1964, p.299)

$$|u|u = U^2 \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^m \frac{8}{(m-2)m(m+2)\pi} \cos m\phi. \quad (2.2)$$

2. 二波

当 u 系由两个以上的振动所构成时, $|u|u$ 的展开就大为复杂了。这里必须首先提到 Jeffreys (1970) 及 Gallagher 和 Munk (1971) 的工作。考虑两个波的相互作用,取

$$u = U_1 \cos \phi_1 + U_2 \cos \phi_2 = U_1 [\cos(\sigma_1 t - \phi_1) + s \cos(\sigma_2 t - \phi_2)], \\ (0 \leq s = U_2/U_1 \leq 1). \quad (2.3)$$

我们可以推测, $|u|u$ 可以展开成

$$|u|u = \sum_{m,n} C_{m,n} \cos(m\phi_1 + n\phi_2). \quad (2.4)$$

Jeffreys 计算了频率等于原来两个波的两项的系数 $C_{1,0}$ 和 $C_{0,1}$, 得到了准确到 s^2 阶的近似公式:

$$\begin{cases} C_{1,0} = \frac{8}{3\pi} \left(1 + \frac{3}{4}s^2\right) U_1^2, \\ C_{0,1} = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{8}s^2\right) U_1 U_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

这个结果表明 $C_{1,0}$ 和 $C_{0,1}$ 与频率 σ_1, σ_2 无关,对此 Jeffreys 有点不放心,在《The Earth》一书第五版出版前,他又请人用数值的方法进行了检验,结果是符合的。Gallagher 和 Munk 采用另外的方法同样得到了 Jeffreys 的结果(但他们有一个疏忽,把 $C_{1,0}$ 中的 s^2 项的系数 $\frac{3}{4}$ 错算成 $\frac{1}{4}$,这对结果有不大的影响)。同时,他们还对一些特殊的情况,研究了(2.4)中其它一些项,但没有给出象式(2.5)这样明确的近似式。下面我们来给出式(2.4)中各个 $C_{m,n}$ 的准确表达式,由准确的表达式很容易导出它们的关于 s 的幂级数展开式。

首先我们来考察一种较为简单的情形,即两个潮波中有一个频率为零。这时, u 可写为

$$u = D + U \cos \phi = U(\delta + \cos \phi). \quad (2.6)$$

我们分两种情况考虑。当 $|D| \geq U$ 时特别简单,此时 $|u|u = (\text{sign} D) \cdot (D + U \cos \phi)^2$ 。这很容易展开,结果是

$$|u|u = (\text{sign} D) \left(D^2 + \frac{1}{2} U^2 \right) + 2|D|U \cos \phi + (\text{sign} D) \cdot \frac{1}{2} U^2 \cos 2\phi. \quad (2.7)$$

附带地我们指出,若 $u = D + \sum_i U_i \cos \phi_i$, 且 $|D| \geq \sum_i U_i$, 则 $|u|u$ 展开式中频率为

σ_i 的项为 $2|D|U_i \cos \phi_i$, 即作用到每个分潮的摩擦系数都一样。这与我们后面要着重讨论的 $D = 0$ 的情况大不一样。

式(2.6)中若 $|D| \leq U$, 即若 $\delta \leq 1$, 则 $|\delta + \cos \phi|(\delta + \cos \phi)$ 的展开式已由 Dronkers (1964, pp.272—275) 给出:

$$|\delta + \cos \phi|(\delta + \cos \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\delta) \cos k\phi, \quad (2.8)$$

其中

$$\lambda_k(\delta) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \delta} - \int_{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \delta}^{\pi} \right) (\delta + \cos \phi)^2 \cos k\phi d\phi.$$

对于 $k = 0, 1, \dots, 5$, 其积分结果如下

$$\begin{cases} \lambda_0(\delta) = \frac{1}{\pi} [(1 + 2\delta^2) \sin^{-1} \delta + 3\delta \sqrt{1 - \delta^2}], \\ \lambda_1(\delta) = \frac{1}{\pi} \left[4\delta \sin^{-1} \delta + \frac{4}{3} (2 + \delta^2) \sqrt{1 - \delta^2} \right], \\ \lambda_2(\delta) = \frac{1}{\pi} \left[\sin^{-1} \delta + \frac{1}{3} \delta (5 - 2\delta^2) \sqrt{1 - \delta^2} \right], \\ \lambda_3(\delta) = \frac{8}{15\pi} (1 - 2\delta^2 + \delta^4) \sqrt{1 - \delta^2}, \\ \lambda_4(\delta) = -\frac{8}{15\pi} \delta (1 - 2\delta^2 + \delta^4) \sqrt{1 - \delta^2}, \\ \lambda_5(\delta) = -\frac{8}{105\pi} (1 - 10\delta^2 + 17\delta^4 - 8\delta^6) \sqrt{1 - \delta^2}. \end{cases} \quad (2.9)$$

现在我们回到我们想着重解决的 σ_1 和 σ_2 均不等于零的情况。为方便计, 令

$$\begin{cases} s = U_2/U_1, \quad \xi = \sigma_1/\sigma_2, \\ \tau = \sigma_2 t - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \phi_1, \quad \theta = \phi_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \phi_1, \end{cases} \quad (2.10)$$

则式(2.3)变为

$$u = U_1 v, \quad v = \cos \xi \tau + s \cos(\tau - \theta). \quad (2.11)$$

我们来推导 $|v|v$ 的关于 τ 的 Fourier 展开式。先假定 ξ 是一个无理数, 即不存在一个整数 l , 使得 $l\xi$ 为一个整数。大部分主要潮汐分潮之间 (如 M_2 和 S_2) 是满足这个条件的。

设

$$|v|v = \sum_i (a_i \cos \omega_i \tau + b_i \sin \omega_i \tau), \quad (2.12)$$

则

$$\begin{cases} a_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |v|v \cos \omega_i \tau d\tau, \\ b_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |v|v \sin \omega_i \tau d\tau. \end{cases} \quad (2.13)$$

令 $T = 2P\pi + \Delta T$, P 为整数, $\Delta T < 2\pi$, 则显然有

$$\begin{aligned}
 a_i &= \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P\pi} \int_{-2P\pi}^{2P\pi} |v| v \cos \omega_i \tau d\tau \\
 &= \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P\pi} \sum_{p=-P}^{P-1} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} |v| v \cos \omega_i \tau d\tau \\
 &= \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P\pi} \sum_{p=-P}^{P-1} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} |\cos \xi \tau + s \cos(\tau - \theta)| [\cos \xi \tau + s \cos(T - \theta)] \cos \omega_i \tau d\tau.
 \end{aligned}$$

令 $\tau' = \tau - 2p\pi$, 则

$$\begin{aligned}
 a_i &= \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P\pi} \sum_{p=-P}^{P-1} \int_0^{2\pi} |\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)| \\
 &\quad \times [\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)] \cos(\omega_i \tau' + \omega_i \cdot 2p\pi) d\tau'.
 \end{aligned}$$

交换积分和取极限的次序, 得

$$\begin{aligned}
 a_i &= \int_0^{2\pi} \left\{ \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P\pi} \sum_{p=-P}^{P-1} |\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)| \right. \\
 &\quad \left. \times [\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)] \cos(\omega_i \tau' + \omega_i \cdot 2p\pi) \right\} d\tau'. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

这里积分和取极限的次序之所以可以交换, 是因为以后的推导表明, 上式中的极限是一致收敛的。

现在式(2.14)中花括号 { } 内 τ' 是常量, p 则是变量, 因而我们可以首先把

$$|\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)| [\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)]$$

展开为以 p 为自变量的 Fourier 级数。将它与式(2.8)中的 $|\cos \phi + \delta|(\cos \phi + \delta)$ 相对比, 可知它可展开为

$$\begin{aligned}
 &|\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)| [\cos(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) + s \cos(\tau' - \theta)] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\delta) \cos k(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi), \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\delta = s \cos(\tau' - \theta). \quad (2.16)$$

由此看来, 式(2.14)中的极限只有当 $\omega_i \cdot 2\pi = m\xi \cdot 2\pi + n \cdot 2\pi$ ($m, n =$ 整数), 或只有当

$$\omega_i = m\xi + n \quad (2.17)$$

时才有可能不等于零。因此该式化作

$$\begin{aligned}
 a_{m,n} &= \int_0^{2\pi} \left\{ \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P\pi} \sum_{p=-P}^{P-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(\delta) \cos k(\xi \tau' + \xi \cdot 2p\pi) \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \cos [(m\xi + n)\tau' + m\xi \cdot 2p\pi] \right\} d\tau' \\
 &= \int_0^{2\pi} \left\{ \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P\pi} \sum_{p=-P}^{P-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \lambda_k(\delta) \cos \{[(m+k)\xi + n]\tau' + (m+k)\xi \cdot 2p\pi\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \lambda_k(\delta) \cos \{[(m-k)\xi + n]\tau' + (m-k)\xi \cdot 2p\pi\} \right] \right\} d\tau'.
 \end{aligned}$$

显然式中极限只有当 $m = k$ 或 $m = -k$ 时才不会为零, 这时 $a_{m,n}$ 可写作

$$\begin{aligned}
 a_{m,n} &= \mathcal{Q}(m) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_{|m|}(s \cos(\tau' - \theta)) \cos n\tau' d\tau' \\
 &= \mathcal{Q}(m) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_{|m|}(s \cos \tau'') \cos n(\tau'' + \theta) d\tau'' \\
 &= \mathcal{Q}(m) \frac{1}{2\pi} \left[\cos n\theta \int_0^{2\pi} \lambda_{|m|}(s \cos \tau'') \cos n\tau'' d\tau'' \right. \\
 &\quad \left. - \sin n\theta \int_0^{2\pi} \lambda_{|m|}(s \cos \tau'') \sin n\tau'' d\tau'' \right].
 \end{aligned}$$

最后等式的第二项显然为零, 第一项积分有 $\int_0^{2\pi} \cdots d\tau'' = 2 \int_0^{\pi} \cdots d\tau''$ 。把积分变量的两撇省去, 有

$$a_{m,n} = \mathcal{Q}(m) \frac{1}{\pi} \cos n\theta \int_0^{\pi} \lambda_{|m|}(s \cos \tau) \cos n\tau d\tau, \quad (2.18)$$

$$[\mathcal{Q}(m) = 2, \text{ 当 } m = 0; \mathcal{Q}(m) = 1, \text{ 当 } m \neq 0].$$

类似地可得

$$b_{m,n} = \mathcal{Q}(m) \frac{1}{\pi} \sin n\theta \int_0^{\pi} \lambda_{|m|}(s \cos \tau) \cos n\tau d\tau. \quad (2.19)$$

仔细观察式(2.9), 我们发现当 k 是偶数时, λ_k 为 δ 的奇函数; 当 k 为奇数时, λ_k 为 δ 的偶函数。因此, 若 $m+n = \text{偶数}$, 亦即若 m 和 n 同为奇数或同为偶数, 则 $\lambda_{|m|}(s \cos \tau)$ 和 $\cos n\tau$ 关于 $\cos \tau$ 的奇偶性相反, 此时, $\int_0^{\pi} \lambda_{|m|}(s \cos \tau) \cos n\tau d\tau = 0$ 。这样, 由式(2.18)和(2.19), 并注意到式(2.17), 可知式(2.12)具有如下展开式:

$$|v|v = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ m+n=1,3,5,\dots}}^{\infty} C_{m,n} \cos [m\xi\tau + n(\tau - \theta)], \quad (2.20)$$

其中

$$C_{m,n} = \mathcal{Q}(m) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \lambda_{|m|}(s \cos \tau) \cos n\tau d\tau. \quad (2.21)$$

将式(2.10)代回(2.20), 我们最后得到

$$\begin{aligned}
 |u|u &= U_1^2 \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ m+n=1,3,5,\dots}}^{\infty} C_{m,n} \cos(m\phi_1 + n\phi_2) \\
 &= U_1^2 \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ m+n=1,3,5,\dots}}^{\infty} C_{m,n} \cos[(m\sigma_1 + n\sigma_2)t - (m\phi_1 + n\phi_2)]. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

根据式(2.9)和(2.21)可以得出 $C_{m,n}$ 的表达式, 我们把 $|m| + |n| \leq 5$ 的各项列出如表 1 所示。表中 $E = E(s)$ 和 $K = K(s)$ 为以 s 为参数的完全椭圆积分。将 $E(s)$ 和 $K(s)$ 的关于 s 的幂级数展开式代入, 我们还可以导出 $C_{m,n}$ 的关于 s 的幂级数展开式, 其结果也已在表 2 中列出。同时我们还用准确的表达式计算了当 $s = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 以及 0.46, 0.71 时的具体数值, 列于表 3 中, 其中 0.46 和 0.71 为引潮力 S_2 对 M_2 和 O_1 对 K_1 的振幅比的概值。为了检验展开式的正确性, 我们曾取 $\sigma_1 = 29^\circ/\text{小时}$, $\sigma_2 = 30^\circ/\text{小}$

时,并取各种 s 和 ϕ 值,计算出各个时刻的 u 值,然后用数值的方法计算出 $|u|u$ 的各频率的 Fourier 系数,所得结果与表 3 所列的数值极为符合。

由表 2 的关于 s 的级数展开式可以看出,Jeffreys 的近似式(2.5)是正确的。

表 1 二波情况下 $|u|u$ 展开式的系数 $C_{m,n}$ 之准确表达式

Table 1. The exact expression of the coefficient $C_{m,n}$ of the development of $|u|u$ in case of two waves.

m	n	频率 Frequency	$C_{m,n}$
1	0	σ_1	$\frac{16}{9\pi^2} [(7 + s^2)E - 4(1 - s^2)K]$
0	1	σ_2	$\frac{16}{9s\pi^2} [(1 + 7s^2)E - (1 + 3s^2)(1 - s^2)K]$
3	0	$3\sigma_1$	$\frac{16}{225\pi^2} [(23 - 23s^2 + 8s^4)E - 4(2 - s^2)(1 - s^2)K]$
2	± 1	$2\sigma_1 \pm \sigma_2$	$\frac{16}{45s\pi^2} [(3 + 7s^2 - 2s^4)E - (3 + s^2)(1 - s^2)K]$
± 1	2	$2\sigma_2 \pm \sigma_1$	$\frac{16}{45s^2\pi^2} [-(2 - 7s^2 - 3s^4)E + 2(1 - 3s^2)(1 - s^2)K]$
0	3	$3\sigma_2$	$\frac{16}{225s^3\pi^2} [(8 - 23s^2 + 23s^4)E - (8 - 19s^2 + 15s^4)(1 - s^2)K]$
5	0	$5\sigma_1$	$-\frac{16}{11025\pi^2} [(281 - 985s^2 + 1080s^4 - 384s^6)E - 4(44 - 93s^2 + 48s^4)(1 - s^2)K]$
4	± 1	$4\sigma_1 \pm \sigma_2$	$-\frac{16}{1575s\pi^2} [-(15 - 103s^2 + 128s^4 - 48s^6)E + (15 - 43s^2 + 24s^4)(1 - s^2)K]$
3	± 2	$3\sigma_1 \pm 2\sigma_2$	$-\frac{16}{315s^2\pi^2} [(6 - 9s^2 + 19s^4 - 8s^6)E - 2(3 - 3s^2 + 2s^4)(1 - s^2)K]$
± 2	3	$3\sigma_2 \pm 2\sigma_1$	$-\frac{16}{315s^3\pi^2} [-(8 - 19s^2 + 9s^4 - 6s^6)E + (8 - 15s^2 + 3s^4)(1 - s^2)K]$
± 1	4	$4\sigma_2 \pm \sigma_1$	$-\frac{16}{1575s^4\pi^2} [(48 - 128s^2 + 103s^4 - 15s^6)E - 4(12 - 26s^2 + 15s^4)(1 - s^2)K]$
0	5	$5\sigma_2$	$-\frac{16}{11025s^5\pi^2} [-(384 - 1080s^2 + 985s^4 - 281s^6)E + (384 - 888s^2 + 613s^4 - 105s^6)(1 - s^2)K]$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

当 ξ 是一个有理数时,情况要复杂一些。这时式(2.22)中的不同的项将可能重迭起来。例如若 $\sigma_1/\sigma_2 = \xi = \frac{1}{2}$, 则由 $(m, n) = (2, -1), (6, -3), \dots$ 各项都可得到频率为零的分量; 而 $(m, n) = (3, -2), (5, -2), \dots$ 等项也将迭加到频率为 σ_1 的项之上; $(m, n) = (4, -1), (4, -3)$ 等项则将迭加到频率为 σ_2 的项之上。不过这种影响总是不太大,特别由于 $|m| + |n|$ 较大时, $C_{m,n}$ 的数值很小,故若 ξ 的最简分式为 p/q , 则当 $p + q$ 稍大,主要项所受到的影响将是非常微弱的。

表 2 $C_{m,n}$ 的关于 s 的幂级数展开式
 Table 2. The expansion of $C_{m,n}$ in the form of series with respect to s .

m	n	频率 Frequency	$C_{m,n}$
1	0	σ_1	$\frac{8}{3\pi} \left(1 + \frac{3}{4} s^2 - \frac{3}{64} s^4 - \frac{1}{256} s^6 - \frac{15}{16384} s^8 - \dots \right)$
0	1	σ_2	$\frac{4}{\pi} s \left(1 + \frac{1}{8} s^2 + \frac{1}{192} s^4 + \frac{1}{1024} s^6 + \dots \right)$
3	0	$3\sigma_1$	$\frac{8}{15\pi} \left(1 - \frac{3}{4} s^2 + \frac{45}{64} s^4 - \frac{25}{256} s^6 - \frac{115}{16384} s^8 - \dots \right)$
2	± 1	$2\sigma_1 \pm \sigma_2$	$\frac{4}{3\pi} s \left(1 - \frac{3}{8} s^2 + \frac{3}{64} s^4 - \frac{5}{1024} s^6 + \dots \right)$
± 1	2	$2\sigma_2 \pm \sigma_1$	$\frac{1}{\pi} s^2 \left(1 - \frac{1}{12} s^2 - \frac{1}{128} s^4 - \frac{1}{512} s^6 - \dots \right)$
0	3	$3\sigma_2$	$\frac{1}{6\pi} s^3 \left(1 + \frac{1}{16} s^2 + \frac{9}{640} s^4 + \dots \right)$
5	0	$5\sigma_1$	$-\frac{8}{105\pi} \left(1 - \frac{21}{4} s^2 + \frac{525}{64} s^4 - \frac{1225}{256} s^6 + \frac{11025}{16384} s^8 + \frac{4851}{65536} s^{10} + \dots \right)$
4	± 1	$4\sigma_1 \pm \sigma_2$	$-\frac{4}{15\pi} s \left(1 - \frac{15}{8} s^2 + \frac{75}{64} s^4 - \frac{175}{1024} s^6 - \frac{315}{16384} s^8 - \dots \right)$
3	± 2	$3\sigma_1 \pm 2\sigma_2$	$-\frac{1}{3\pi} s^2 \left(1 - \frac{3}{4} s^2 + \frac{15}{128} s^4 + \frac{7}{512} s^6 + \dots \right)$
± 2	3	$3\sigma_2 \pm 2\sigma_1$	$-\frac{1}{6\pi} s^3 \left(1 - \frac{3}{16} s^2 - \frac{3}{128} s^4 - \dots \right)$
± 1	4	$4\sigma_2 \pm \sigma_1$	$-\frac{1}{48\pi} s^4 \left(1 + \frac{3}{20} s^2 + \dots \right)$
0	5	$5\sigma_2$	$-\frac{1}{480\pi} s^5 \left(1 + \frac{3}{8} s^2 + \dots \right)$

3. 多波

当 u 由两个以上振动构成时, $|u|u$ 的展开变得更加困难。我们将把讨论限于得出一些主要分量, 而且将只满足于近似的结果。

设

$$u = U_1 \cos \phi_1 + \sum_{i=2,3,\dots} U_i \cos \phi_i = U_1 \left[\cos \phi_1 + \sum_{i=2,3,\dots} s_i \cos(\phi_1 + \Delta \phi_i) \right], \quad (2.23)$$

其中 $\phi_i = \sigma_i t - \phi_i (i = 1, 2, \dots)$; $\Delta \phi_i = \phi_i - \phi_1 (i = 2, 3, \dots)$. 令

$$\begin{cases} A \cos \chi = 1 + \sum_{i=2,3,\dots} s_i \cos \Delta \phi_i, \\ A \sin \chi = \sum_{i=2,3,\dots} s_i \sin \Delta \phi_i, \end{cases} \quad (2.24)$$

则有

$$u = U_1 A \cos(\phi_1 + \chi). \quad (2.25)$$

由式 (2.2), 知

表 3 对应各个 s 值的 $C_{m,s}$ 的具体数值
 Table 3. The numerical value of $C_{m,s}$ for various values of s .

m	n	s 频率 Frequency	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.46	0.71
1	0	σ_1	0.849	0.855	0.874	0.906	0.950	1.005	1.073	1.151	1.239	1.336	1.441	0.982	1.159
0	1	σ_2	0.000	0.127	0.256	0.386	0.520	0.657	0.799	0.947	1.103	1.267	1.441	0.601	0.962
3	0	$3\sigma_1$	0.170	0.168	0.161	0.152	0.139	0.124	0.108	0.092	0.078	0.066	0.058	0.130	0.091
2	± 1	$2\sigma_1 \pm \sigma_2$	0.000	0.042	0.084	0.123	0.160	0.193	0.222	0.246	0.265	0.279	0.288	0.180	0.248
± 1	2	$2\sigma_2 \pm \sigma_1$	0.000	0.003	0.013	0.028	0.050	0.078	0.111	0.149	0.192	0.239	0.288	0.066	0.153
0	3	$3\sigma_2$	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.007	0.012	0.019	0.028	0.041	0.058	0.005	0.020
5	0	$5\sigma_1$	-0.024	-0.023	-0.019	-0.014	-0.009	-0.003	0.001	0.003	0.003	0.002	0.001	-0.005	0.003
4	± 1	$4\sigma_1 \pm \sigma_2$	0.000	-0.008	-0.016	-0.021	-0.025	-0.026	-0.024	-0.020	-0.016	-0.011	-0.008	-0.026	-0.020
3	± 2	$3\sigma_1 \pm 2\sigma_2$	0.000	-0.001	-0.004	-0.009	-0.015	-0.022	-0.028	-0.034	-0.039	-0.041	-0.041	-0.019	-0.035
± 2	3	$3\sigma_2 \pm 2\sigma_1$	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.003	-0.006	-0.011	-0.016	-0.024	-0.032	-0.041	-0.005	-0.017
± 1	4	$4\sigma_2 \pm \sigma_1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.001	-0.002	-0.003	-0.005	-0.008	0.000	-0.002
0	5	$5\sigma_2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000

$$|u|u = \frac{8}{3\pi} U_1^2 A^2 \cos(\phi_1 + \chi) + \dots = \frac{8}{3\pi} U_1 A u + \dots \quad (2.26)$$

若 s_i 足够小, 则 A 可按二项式展开如下:

$$\begin{aligned} A &= \left[1 + 2 \sum_{i=2,3,\dots} s_i \cos \Delta\phi_i + \sum_{i=2,3,\dots} s_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=2,3,\dots \\ j>i}} s_i s_j \cos(\Delta\phi_i - \Delta\phi_j) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) \frac{1}{n!} \left[2 \sum_{i=2,3,\dots} s_i \cos \Delta\phi_i + \sum_{i=2,3,\dots} s_i^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{\substack{i,j=2,3,\dots \\ j>i}} s_i s_j \cos(\Delta\phi_i - \Delta\phi_j) \right]^n. \end{aligned}$$

将这个式子代入式(2.26), 取到 s_i^2 项, 可得

$$\begin{aligned} |u|u &= \frac{8}{3\pi} U_1^2 \left\{ \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{i=2,3,\dots} s_i^2 \right) \cos \phi_1 \right. \\ &\quad + \sum_{i=2,3,\dots} \left[\frac{3}{2} \left(1 + \frac{s_i^2}{8} + \sum_{\substack{j=2,3,\dots \\ j \neq i}} \frac{s_j^2}{4} \right) \right] s_i \cos \phi_i \\ &\quad + \sum_{i=2,3,\dots} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{8} s_i^2 - \sum_{\substack{j=2,3,\dots \\ j \neq i}} \frac{3}{4} s_j^2 \right) \right] s_i \cos(2\phi_1 - \phi_i) \\ &\quad + \sum_{i=2,3,\dots} \frac{3}{8} s_i^2 \cos(2\phi_i - \phi_1) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=2,3,\dots \\ j>i}} \frac{3}{4} s_i s_j \cos(\phi_i + \phi_j - \phi_1) \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=2,3,\dots \\ i \neq j}} \frac{3}{4} s_i s_j \cos(\phi_1 + \phi_i - \phi_j) \\ &\quad - \sum_{i=2,3,\dots} \frac{1}{8} s_i^2 \cos(3\phi_1 - 2\phi_i) \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{i,j=2,3,\dots \\ j>i}} \frac{1}{4} s_i s_j \cos(3\phi_1 - \phi_i - \phi_j) + \dots \right\}. \quad (2.27) \end{aligned}$$

上式中令 $s_3 = s_4 = \dots = 0$, 则可得二波情况下展开式的一些主要项, 其结果与表 2 是一致的。式(2.26)中没有写出的高频项也可以用类似的方法展开, 我们对此暂不论述。

以上的展开方法可容易地推广应用于摩擦力比例于流速任意 n 次方的情形, 即类似地可应用于 $|u|^{n-1}u$ 的展开。当 $n = 1, 3, 5, \dots$, $|u|^{n-1}u$ 的展开特别简单。

参 考 文 献

- [1] Dronkers, J. J., 1964. Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters. North-Holland Publishing Company. pp. 272—275, 299.
- [2] Gallagher, B. S. and W. H. Munk, 1971. Tides in Shallow Water Spectroscopy. *Tellus* 23(4—5):346—365.
- [3] Jeffreys, H., 1970. The Earth (5th ed.), Cambridge. pp. 301—304.
- [4] Lamb, H., 1932. Hydrodynamics (6th ed.). Cambridge. p. 281.
- [5] Taylor, G. I., 1919. Tidal Friction in the Irish Sea. *Phil. Tran. Roy. Soc.* A220: 1—93.

NONLINEAR EFFECTS OF TIDAL FRICTION (I)*

Fang Guohong

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica*)

Abstract

The nonlinear interactions of the tidal waves propagating in an infinite homogeneous shallow canal are analysed. The exact expressions of the coefficients of the Fourier development of $|u|u$ are presented when u contains two waves, and an approximate development is also given when u contains three or more waves. The approximate solutions for the primary and subordinate waves are given, and some conclusions are drawn: (1) Under the action of quadratic friction when the primary waves travel together, their amplitudes will decay at different rates. (2) The nonlinear friction causes the occurrence and growth of subordinate waves with frequencies $2\sigma_1 - \sigma_2$, $2\sigma_2 - \sigma_1$, $3\sigma_1$, $3\sigma_2 \dots$, but the subordinate waves can not develop unboundly owing to friction. (3) Because of frictional nonlinearity, the practical nodal factors f used in analysis and prediction should differ from the theoretical ones: the practical variational ranges of the values f should usually be smaller than the theoretical ones. (4) The growth of the over tides excited by non-frictional nonlinearity is reduced by friction, and it is inferred that in a homogeneous canal, the shock wave can not occur unless the condition $\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{\sigma}{\gamma} > 0.141$ is satisfied. (5) the friction enhances the wave with frequency $\sigma_1 - \sigma_2$ (e.i. MS_t for M_2 and S_2 interaction) and make the daily mean sea level higher at spring tide than at neap tide.

The paper is separated into two parts; part (I) includes two sections and part (II) includes the other three sections.

In Sec. 1, the governing equations (1.1) are written. The friction is considered as being partly nonlinear because of high correlation of the function $|u|u$ to the velocity u . The nonlinear part of the friction is characterized by the quantity ε_f^2 [Eq. (1.2), where a is independent of the time t and determined according to the condition $d\varepsilon_f^2/d\alpha = 0$], and the non-frictional nonlinearity is characterized by ε_n^2 [Eq. (1.3)]. The ratio of these two nonlinearities for a non-dissipative sinusoidal wave is given in Eq. (1.4).

Sec. 2 contains the development of the function $|u|u$. In case of a single wave (2.1), the Fourier development of $|u|u$ (2.2) is well known, but for two waves (2.3), only the approximate expressions (2.5) for the components of the development with frequencies σ_1 and σ_2 were given by Jeffreys. The complete development takes the form of (2.22), where the exact expressions of the Fourier coefficients $C_{m,n}$ of the major components are listed in Table 1. Table 2 gives the expansions of $C_{m,n}$ in the form of series with respect to s , and the numerical values of $C_{m,n}$ are specified in Table 3. When three or more waves (2.23) are taken into account, the approximate development of $|u|u$ is shown in Eq. (2.27).

* Contribution No. 529 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.