



其中

$$A_i = 3(h_{i+1} - h_i)T(h_{i-1}, h_i) + 3(h_i - h_{i-1})T(h_i, h_{i+1}),$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1; \quad (3)$$

$$T(h_{i-1}, h_i) = \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i - h_{i-1}}. \quad (4)$$

(2)式是一个三对角矩阵,可用追赶法解之,遂得

$$T'_n = z_n,$$

$$T'_{i-1} = z_i - \delta_i T'_i, \quad i = n, n-1, \dots, 2,$$

其中

$$z_1 = \frac{3T(h_1, h_2)}{2},$$

$$z_i = \frac{A_i - (h_i - h_{i-1})z_{i-1}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$z_n = \frac{3T(h_{n-1}, h_n) - z_{n-1}}{\beta_n};$$

$$\beta_1 = 2, \delta_i = \frac{(h_{i+1} - h_i)}{\beta_i},$$

$$\beta_{i+1} = 2(h_{i+2} - h_i) - (h_{i+2} - h_{i+1})\delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

这样,我们就给出了单站水温的样条表达式:

$$T(h) = \begin{cases} T_1(h) & h_1 \leq h \leq h_2 \\ \vdots & \vdots \\ T_i(h) & h_i \leq h \leq h_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ T_{n-1}(h) & h_{n-1} \leq h \leq h_n \end{cases} \quad (6)$$

这里,  $T_i(h)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 由(1)式给出。(6)式是一个分段为三次的代数多项式。在接点上,曲线具有连续的二阶导数。

## 2. 实例

三次样条函数是分段的三次多项式。为醒目计,将(1)式改写如下:

$$T_i(h) = \frac{T'_i(h_{i+1} - h_i) + T'_{i+1}(h_i - h_{i+1}) - 2(T_{i+1} - T_i)}{(h_{i+1} - h_i)^3} (h - h_i)^3$$

$$+ \frac{3(T_{i+1} - T_i) - 2T'_i(h_{i+1} - h_i) - T'_{i+1}(h_i - h_{i+1})}{(h_{i+1} - h_i)^2} (h - h_i)^2$$

$$+ T'_i(h - h_i) + T_i$$

$$= a_{i3}(h - h_i)^3 + a_{i2}(h - h_i)^2 + a_{i1}(h - h_i) + a_{i0} \quad (6)'$$

因此,只须将系数  $a_{ik}$  ( $k = 3, 2, 1, 0$ ) 求出便得(6)式。作为一个例子,表 1a-c 分别列出了东海 A 站 (1978.7) 的实测值、分段样条表达式的系数值及由样条表达式计算所得的各标准层的温度值。

1) 于此,规定  $h_1 - h_0 = h_{n+1} - h_n = 1$ 。

表 1a A 站 (1978.7) 实测值

实测层 (m)	0	4.9	9.8	14.7	19.5	24.3	29.1	49.0	73.8	81.0
实测值(°C)	24.46	23.87	23.54	19.66	14.76	11.43	11.06	11.35	11.90	11.71

表 1b 按表 1a 数据计算所得样条表达式系数

分段 (i)	区间 (m)	样条表达式系数(降幂排列)			
		$a_{i3}$	$a_{i2}$	$a_{i1}$	$a_{i0}$
1	0—4.9	0.001865	0	-0.120624	24.46
2	4.9—9.8	-0.009325	0.027974	0.019247	23.87
3	9.8—14.7	0.006554	-0.111897	-0.400365	23.54
4	14.7—19.5	0.003109	-0.013588	-1.027787	19.66
5	19.5—24.3	0.003410	0.033048	-0.930486	14.76
6	24.3—29.1	-0.005868	0.084196	-0.344268	11.43
7	29.1—49.0	0.000085	-0.003830	0.057558	11.06
8	49.0—73.8	-0.000026	0.001277	0.006489	11.35
9	73.8—81.0	0.000038	-0.000692	0.021102	11.90

表 1c A 站标准层的样条函数计算值

标准层 (m)	0	5	10	15	20	25	30	50	75
计算值 (°C)	24.46	23.87	23.46	19.35	14.30	11.23	11.11	11.36	11.92

用上述样条插值方法对东海 300 多个站次的实测水温进行计算,结果令人满意。

此外,有了样条表达式,按照事先给定的梯度值,就可以直接在计算机上求出跃层的特征值(深度、强度、厚度)和水温廓线的其它示性值,诸如水温极值、垂线水温平均值、各标准层间的温差等。图 1a, b 分别为 B 站 (1978.7) 和 C 站 (1978.8) 由样条曲线表达式求得的跃层位置(在实测曲线上打一横杠)。上述两站分属两类不同的跃层,计算所得的跃层位置是可靠的,可见对实测曲线的逼近本身是良好的。

### 3. 讨论

近年来,随着电子计算机使用的普及,人们用插值法来代替手工描画取值法。由此,相继出现多种插值方法,尤以三点 Lagrange 插值法为各海洋国家所普遍采用。因此,下面各点主要是与三点 Lagrange 插值相比较而言。

(1) 样条插值有更高的精确度。从实用的角度看,这是十分重要的。

表 2 对 1978 年 8 月东海 D 站的三点 Lagrange 插值和三次样条插值结果进行了比较。由表 2 可知,样条插值结果要比 Lagrange 插值好, Lagrange 插值在 10、15、20m 三层出现了不允许误差(小数点以后第一位就出现误差),但样条插值都在小数点以后第二位才

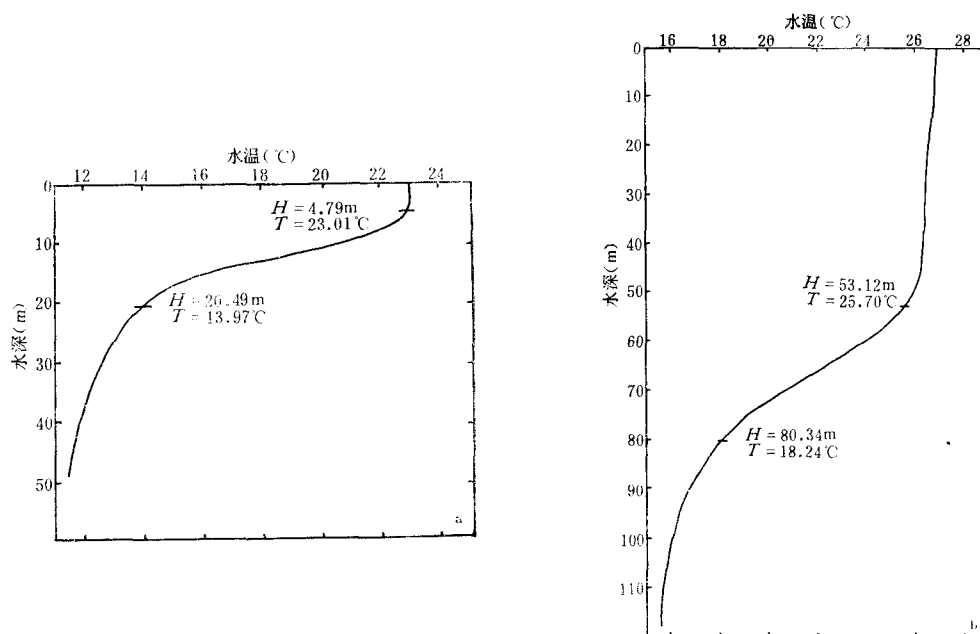


图1 由样条表达式计算所得跃层位置

(T—温度; H—水深)

a. B站(1978.7); b. C站(1978.8)。

表2 D站(1978.8)三点 Lagrange 和三次样条插值结果

(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
插值层次(m)	实测(°C)	由三次样条(°C)	$\Delta_1 = (1)-(2)$	由 Lagrange (°C)	$\Delta_2 = (1)-(4)$
5	26.83	26.83	0	26.83	0
10	26.75	26.73	0.02	26.65	0.10
15	24.15	24.21	-0.06	23.90	0.25
20	19.83	19.84	-0.01	19.73	0.10
25	19.20	19.20	0	19.25	-0.05
30	19.11	19.13	-0.02	19.14	-0.03
35	19.05	19.07	-0.02	19.02	0.03
50	18.95	18.96	-0.01	18.93	0.02

出现误差。另外,可以看到,两种方法大的误差都出现在跃层界面附近。有鉴于此,我们选择某强跃区 20 多个测站共 300 余测次,分别用上述两种方法进行插值并计算其 18m 层(跃层上界平均位置)的均方误,其结果分别为

$$\sigma_{\text{Lagrange}} = 0.109(^{\circ}\text{C})$$

$$\sigma_{\text{Spline}} = 0.025(^{\circ}\text{C})$$

可见,样条插值比 Lagrange 插值具有更高的精确度这个结论不失普遍性。

(2) 样条插值曲线比 Lagrange 插值曲线具有更好的光滑性。因为样条函数有“最佳逼近与极小曲率性质”，即在所有二次可微函数中，三次样条提供最光滑的内插。因此，它不仅保证了插值曲线本身在整个插值区间的连续性，而且在接点上插值曲线的二阶导数也是连续的。但 Lagrange 插值曲线在接点上一般是不连续的。

(3) 样条插值或 Lagrange 插值都有一个共同的缺点，即在强跃层界面附近（在这里，被拟合曲线本身有拐点）拟合曲线要产生不合理摆动（参看图 2）。Reiniger, Ross<sup>[6]</sup> 和 Maurice Rattray<sup>[4]</sup> 等人很早就注意到这一点，为此，他们建议采用加权三点 Lagrange 插值来改善插值效果，但其效果并不能令人满意。作为一种尝试，我们提出一种算法，即所谓“样条磨光”法。

## 二、整理海洋水温资料的样条磨光法

### 1. 样条磨光法概述

根据样条理论，基样条 (Cardinal Spline) 可以表示为

$$\Omega_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j \binom{k+1}{j} \left(x + \frac{k+1}{2} - j\right)_+^k}{k!}, \quad k \text{ 为任意正整数} \quad (7)$$

其中  $(u)_+$  的意义是：

$$(u)_+ = \begin{cases} u & \text{当 } u \geq 0, \\ 0 & \text{否则。} \end{cases}$$

可以验证，如下卷积成立：

$$\Omega_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{k-1}(x-t) * \Omega_0(t) dt \quad (8)$$

如果  $f(x) \in C^m(-\infty, \infty)$ ，那末称

$$f_{k+1}(x, h) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_k\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t) dt \in C^{m+k+1}, \quad (9)$$

为  $f(x)$  的  $k+1$  次磨光函数。 $h$  称为磨光参数，且下式成立

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_{k+1}^{(j)}(x, h)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(j)}(x)|^2 dx, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

这表明  $\Omega_k(x)$  具有磨光性质。

对于一组给定的实测值  $A_i$ ，首先将其联成折线，利用一次  $\delta$ -spline<sup>1)</sup> 函数  $\Omega_1(x)$ ，可将此折线统一表达为

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^n y_j \Omega_1\left(\frac{x-x_j}{h}\right), \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式并利用(8)式，依次可得磨光公式：

$$f_1(x, h) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_0\left(\frac{t-x}{h}\right) \sum_{j=1}^n y_j \Omega_1\left(\frac{t-x_j}{h}\right) dt$$

1)  $\delta$ -spline 即 Schoenberg 的 B-spline，为读者查阅方便，我们按[1]中的符号与术语行文。

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n y_j \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1 \left( u - \frac{x_j - x}{h} \right) \Omega_0(u) du \\
&= \sum_{j=1}^n y_j \Omega_2 \left( \frac{x - x_j}{h} \right), \\
f_2(x, h) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_0 \left( \frac{t - x}{h} \right) f_1(t, h) dt \\
&= \sum_{j=1}^n y_j \Omega_3 \left( \frac{x - x_j}{h} \right), \dots\dots
\end{aligned}$$

一般地,有

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x, h) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_0 \left( \frac{t - x}{h} \right) f_k(t, h) dt \\
&= \sum_{j=1}^n y_j \Omega_{k+2} \left( \frac{x - x_j}{h} \right), \\
k &= 0, 1, 2, \dots\dots
\end{aligned} \tag{11}$$

当  $k = 0$  时,(11)式就是

$$\begin{aligned}
f_1(x, h) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n y_j \left[ \left( \frac{x - x_j}{h} + \frac{3}{2} \right)_+^2 - 3 \left( \frac{x - x_j}{h} + \frac{1}{2} \right)_+^2 \right. \\
&\quad \left. + 3 \left( \frac{x - x_j}{h} - \frac{1}{2} \right)_+^2 - \left( \frac{x - x_j}{h} - \frac{3}{2} \right)_+^2 \right], \tag{12}
\end{aligned}$$

而  $k = 1$  时,

$$\begin{aligned}
f_2(x, h) &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n y_j \left[ \left( \frac{x - x_j}{h} + 2 \right)_+^3 - 4 \left( \frac{x - x_j}{h} + 1 \right)_+^3 \right. \\
&\quad \left. + 6 \left( \frac{x - x_j}{h} \right)_+^3 - 4 \left( \frac{x - x_j}{h} - 1 \right)_+^3 + \left( \frac{x - x_j}{h} - 2 \right)_+^3 \right]. \tag{13}
\end{aligned}$$

其中  $y_j$  表示节点  $x_j$  处的函数值,  $f_2(x, h)$  具有二阶连续导数。

我们分别称(12)和(13)式为一次和二次磨光公式,这是下面我们要用的、也是最有用的公式。

## 2. 具体做法

(1) 写出折线表达式: 设有实测点列  $A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n_0$ 。首先连接  $A_i, A_{i+1}$  得折线  $A_1 A_2 \dots A_n$ , 它们通过实测点  $A_i$  且保持原凹凸性。

为简便计,设节点  $x_i$  等距,即  $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n_0$ 。于是可以写出折线表达式:

$$f_0(x, h) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i(x) \tag{14}$$

其中

$$\varphi_i(x) = \left( 1 - \left| \frac{x - x_i}{h} \right| \right)_+.$$

然后,把折线“磨光”。由上面的理论推导可知,所谓磨光,实际是对折线表达式进行一次

卷积运算。磨光后的曲线表达式就是(11)式。

(2) 求取偏差值并判断保凸性：在节点上，磨光函数与实测值的偏差可以预先求出。为此，只须将  $x_i$  代入 (12) 和 (13) 式，便得一次和二次磨光函数在节点上的偏差值分别为：

$$y(x_i) - \tilde{y}_i(x) = \frac{1}{8} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = \frac{1}{8} \Delta^2 y_i, \quad (15)$$

$$y(x_i) - \tilde{y}_i(x) = \frac{1}{6} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = \frac{1}{6} \Delta^2 y_i, \quad (16)$$

$$i = 2, \dots, n-1。$$

式中  $y_i$  为第  $i$  点的实测值， $\tilde{y}_i$  和  $\tilde{y}_i$  分别为相应的一次和二次磨光函数的值。由 (15) 和 (16) 式知，在测点上，一次和二次磨光函数的值与实测值的偏差分别为二阶差商的  $\frac{1}{8}$  和

$\frac{1}{6}$ 。

事实上，对于一次和二次磨光函数

$$f'_{k+1}(x, h) = \Delta^2 y_i / h^2, \quad k = 0, 1。$$

可见  $f_1(x, h)$  和  $f_2(x, h)$  保持实测值  $\{y_i\}$  的凹凸性。而直线的磨光仍为直线。所以不必逐点判别保凸性。

### (3) 盈亏修正

对于任意折线，我们既希望把它变得光滑，又希望偏差尽可能小。为了提高逼近精度，可采用“盈亏修正”的办法。

所谓盈亏修正，是指对原实测值(原型值)进行修正。其办法是：在节点上，凡是拟合值比原型值小，则加大之，此谓之“盈”；反之，凡是拟合值比原型值大，则减小之，此谓之“亏”。对于一次和二次磨光，其节点上的新型值由下两式决定：

$$\tilde{y}_i = y_i - \frac{1}{8} \Delta^2 y_i, \quad (17)$$

$$\tilde{y}_i = y_i - \frac{1}{6} \Delta^2 y_i, \quad i = 2, \dots, n-1。 \quad (18)$$

实际计算时，首先按实测值求得拟合曲线  $f(x)$ ，如果精度不够，再逐点按 (17) 或 (18) 式求得新的值，然后作拟合曲线  $\tilde{f}(x, h)$  或  $\tilde{f}(x, h)$ 。一般地，盈亏修正只须进行一次或两次。

### 3. 实例

(1) 单站水温资料的逼近实例：以 1978 年 7 月 E 站为例，分别用三点 Lagrange 插值、三次样条插值和一次样条磨光函数逼近之。结果表明，由于该站跃层强，当用三点 Lagrange 插值时，在跃层的上下界面附近，拟合曲线出现较大的摆动；而用三次样条插值时，摆动虽小些，但仍不能被消除。然而当用样条磨光方法来处理时，拟合曲线变得相当光滑，摆动被消除了。磨光曲线虽然没有通过实测点，但经过两次盈亏修正以后，计算值与实测值的差都在小数点以后第二位(参看表 3 和图 2)。显然，在这种情况下，样条磨光曲线最接近实测状况。

表3 E站(1978.7)一次磨光结果

层次 (m)	实测值(°C)	用实测值直接磨光(°C)		盈亏修正一次(°C)		盈亏修正二次(°C)	
		磨光值	与实测值差	磨光值	与实测值差	磨光值	与实测值差
0	25.49	25.49	0	25.49	0	25.49	0
5	25.61	25.3234	0.2866	25.5744	0.0356	25.5989	0.0111
10	25.44	25.1525	0.2875	25.4555	-0.0155	25.4681	-0.0281
15	21.97	21.5575	0.4125	21.8009	0.1691	21.8940	0.076
20	15.20	16.0150	-0.8150	15.4517	-0.2517	15.2962	-0.0962
25	14.95	14.9788	-0.0288	14.8531	0.0969	14.8901	0.0599
30	14.93	14.9475	-0.0175	14.9277	0.0023	14.9183	0.0117
50	15.05	15.0750	-0.025	15.0178	0.0322	15.0686	-0.0186
54	14.97	14.97	0	14.97	0	14.97	0

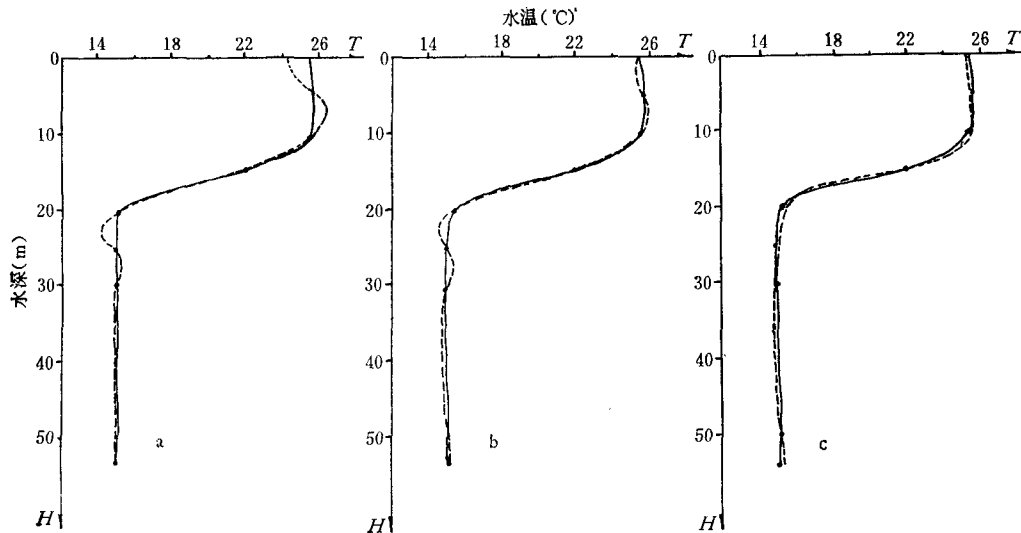


图2 E站(1978.7)三种逼近方法的比较

(实线为实测曲线,虚线为逼近曲线)

a. 三点 Lagrange 插值; b. 三次样条插值; c. 一次样条磨光。

(2) 断面等温线的逼近实例: 在建立了断面上各站温度廓线的样条函数表达式以后,由于这些表达式都是低次(二次或三次)的代数方程。因此,我们可以方便地利用这些表达式反求出等温线所处的深度。在配有描图仪的电子计算机上,还可以将这些等温线描绘出来。我们对1975—1979年夏季(6—10月)东海某些断面作了这样的计算,所得断面等温线也是令人满意的。这从另一侧面证明了对实测曲线的逼近是可取的。图3绘出了某断面(1978.8)的等温线,以 $1^{\circ}\text{C}$ 为间隔,可以看出按实测值所描的曲线(实线),和按样条表达式计算所得绘制的曲线(虚线)基本上是吻合的。

#### 4. 讨论

样条磨光函数同样条插值函数一样,具有样条函数的一切基本性质,但也有不同于插值之处。



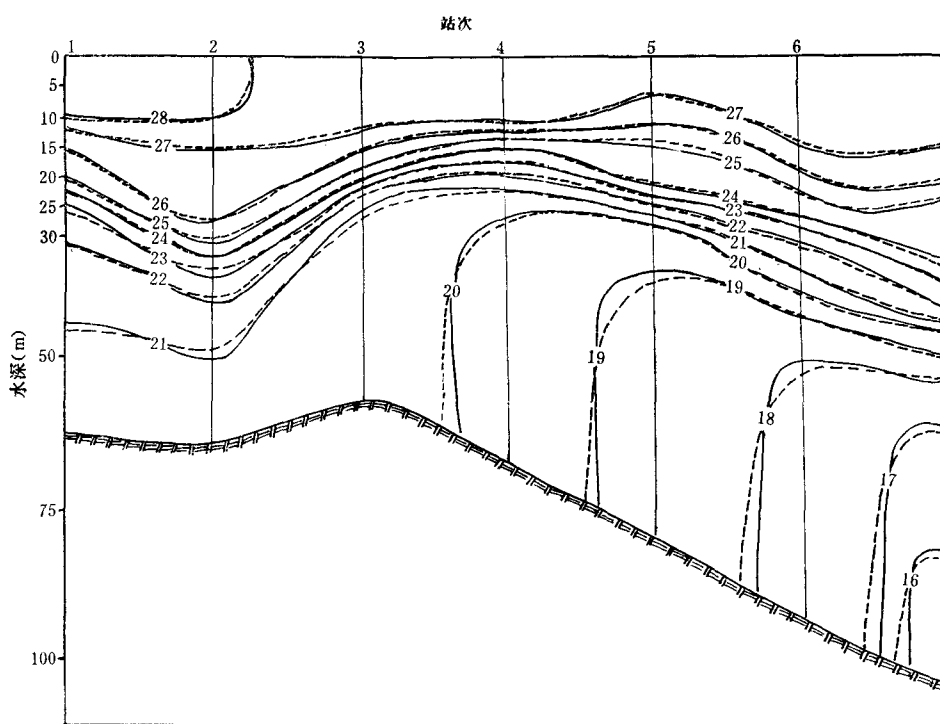


图3 1978.8 某断面等温线  
(实线为实测曲线;虚线为样条曲线。)

从图2的对比逼近中可看到,样条磨光曲线具有最好的光滑性,这是其优点,我们用来克服插值时所出现的不合理摆动。然而,这个优点是以失掉一定的精确度换来的。这是因为,插值曲线是严格通过实测点的(表1b中常数项的值就是实测点的值),而磨光曲线则不通过实测点(直线除外)。但由于所失掉的精度可以预先算得,故可以避免误差。作者的实践证明,通过“盈亏修正”以后,拟合曲线所造成的误差往往要比由插值引起的不合理摆动(凸起)所造成的误差更小。因此,对于有强跃层的海区,应用样条磨光方法来处理资料是可行的。然而磨光次数越高,所失掉的精度也越大,所以在处理海洋水文资料时,一般以一次或两次磨光(即两次或三次多项式)为宜。

### 三、结 语

本文用样条函数方法来处理海洋水温资料,获得较为满意的结果。一般,三次样条插值曲线比三点 Lagrange 插值曲线有更高的逼近精度和更好的光滑性。

在用插值法处理水文资料时,最大的困难是在强跃层界面处所出现的不合理摆动(或凸起)而大大地影响了跃层位置的确定。为了克服插值曲线的这一缺点,作者介绍了样条磨光法,它对于克服插值曲线的不合理摆动是有效的,可用于有强跃层海区水文资料的处理。

本文以温度为例,但所用方法对于以深度为函数的其它海洋要素,诸如盐度、密度等同样适用。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 李岳生, 齐东旭, 1978. 样条函数方法. 科学出版社, 89—119 页, 148—183 页。  
[ 2 ] 南京大学数学系, 1978. 数值逼近方法. 科学出版社, 122—150 页。  
[ 3 ] Borkowski, M. R. and J. R. Goulet, 1971. Comparison of methods for interpolating oceanographic data. *Deep Sea Research* 18: 269—274.  
[ 4 ] Maurice Rattray, JR., 1962. Interpolation errors and oceanographic sampling. *ibid* 9: 25—37.  
[ 5 ] NOAA (ed.), 1976. Computer programs in marine science. Key to Oceanographic Records Documentation 5.  
[ 6 ] Reiniger, R. F. and C. K. Ross, 1968. A method of interpolation with application to oceanographic data. *Deep Sea Research* 15: 185—193.  
[ 7 ] Schoenberg, I. J., 1946. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Math.* part A, pp. 45—99; part B, pp. 112—141.

SPLINE FUNCTION METHOD APPLIED TO  
PROCESSING HYDROGRAPHIC DATA

Jiang Jingzhong

*(Second Institute of Oceanography, National Bureau of Oceanography, Hangzhou)*

and

Zhou Yunshi

*(Jilin University, Changchun)*

## Abstract

In this paper, the hydrographic data are processed by spline curve fitting. According to the result of calculating the data of more than 300 groups taken from the East China Sea during the recent years, the method of spline function, especially the polishing method, shows a higher precision than the lagrangian three-point interpolation. It can also eliminate the unreasonable swing of the fitting curve on the strong thermocline interface.

This method can also be applied to other oceanographic element calculations such as salinity and density.