

# $|U|U$ 的 Fourier 展开和渤海 海底拖曳系数 $C_D^*$

周 贻 方国洪

(中国科学院海洋研究所, 青岛)

**摘要** 在潮波动力学中,底摩擦在潮波之间的相互作用中起着很大的作用。本文将与速度平方成正比的底摩擦项展成一个 Fourier 级数,并讨论了底摩擦引起的潮波之间的相互干扰。由非线性动量方程,我们得到机械能方程。利用以上的 Fourier 级数,本文由机械能方程给出一种求解某一区域上平均拖曳系数  $C_D$  的方法。将此方法应用于渤海,求得该海区的拖曳系数  $C_D = 0.0013$ 。

在潮波动力学计算中,常用 Reynolds 方程在准静力平衡的假设下,沿深度积分平均得到平均流方程。其中的底摩擦项,在引入 Prandtl 混合长理论和 Von Karman 相似性假设后,得到  $\frac{C_D}{h + \zeta} |U|U$  的形式。多个潮波存在时,底摩擦在潮波间的相互干扰中起着重要作用。对底摩擦项进行讨论的一个主要方法是将其 Fourier 展开。Dronkers<sup>[4,5]</sup>, 方国洪<sup>[1]</sup>, Le Provost<sup>[8]</sup> 等都曾经给出过不同的精确解和近似解。但二维多波问题没得到很好解决。本文给出的底摩擦在任意多个波下的一个近似 Fourier 级数展开,其近似程度更好,适用范围更广。

1919年 Taylor 从线性动量方程导出机械能守恒方程,并研究了爱尔兰海潮能收支问题。1953年 Proudman<sup>[3]</sup> 用 Taylor 的数据估算出爱尔兰海的  $M_2$  分潮的能量消耗,近似得到海底拖曳系数  $C_D = 0.0026$ 。本文从非线性动量方程出发,导出机械能守恒方程,并同时考虑  $M_2, O_1, K_1$  分潮,求出渤海的平均潮能输入与耗散,得出渤海的海底拖曳系数  $C_D = 0.0013$ 。

## 一、机械能守恒方程

自 Taylor 1919 年从线性动量方程得到机械能方程后, Garrett 在 1974 年对 Taylor 的机械能守恒方程中引潮力项作了一些更正。Pingree<sup>[11]</sup> 在忽略引潮力的情况下从非线性动量方程求得机械能守恒方程。本文由不忽略引潮力的非线性动量方程导出一个完整

\* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 1376 号。

本文根据周贻的研究生论文写成,毛汉礼教授对本工作给予热诚指导,郑文振高级工程师,陈宗镛副教授提出宝贵意见,特致谢意。

收稿日期: 1984 年 11 月 21 日。

的微分形式的机械能守恒方程。进而还得到一个给定区域上的积分形式的能量守恒方程。

我们采用沿深度积分平均的二维动量方程和连续性方程<sup>1)</sup>。设在域  $S$  上

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{f} \times \mathbf{U} = -g \nabla (\zeta - \zeta_c) - \frac{C_D}{h + \zeta} |\mathbf{U}| \mathbf{U} \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \{(h + \zeta) \mathbf{U}\} = 0 \quad (1.1b)$$

在  $S$  的边界  $\Gamma$  上满足边界条件

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}|_{\text{固壁}} = 0 \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}|_{\text{开口}} = \varphi_0(x, y, t) \quad (1.2b)$$

其中  $\mathbf{U}$  是沿垂直方向平均的水平流速;  $\mathbf{f} = 2\Omega \sin \varphi \mathbf{k}$ ,  $\Omega$  是地球自转角速度,  $\varphi$  是纬度,  $\mathbf{k}$  是垂直向上的单位向量;  $\zeta$  为波面相对于平均海平面的高度;  $g\zeta_c$  是引潮力势;  $h$  是相对于平均海平面的水深;  $\mathbf{n}$  是边界的外法线单位向量;  $\varphi_0$  是已知函数;  $\nabla$  为水平梯度算子。海水密度取作常数。

选择平均海平面为势能零点, 则一个单位截面面积流体柱的总机械能<sup>2)</sup>为

$$E = \frac{1}{2} (h + \zeta) \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{2} (h + \zeta)(\zeta - h)g \quad (1.3)$$

由此可得机械能守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & -\nabla \cdot \{E \mathbf{U}\} - \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2} (h + \zeta)^2 g \mathbf{U} \right\} \\ & + g(h + \zeta) \mathbf{U} \cdot \nabla \zeta_c - C_D |\mathbf{U}|^3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

上方程的左边表示总机械能随时间的变化率。方程的右边, 各项依次为扩散项、压力对流体作功项、引潮力作功项、湍流耗散。

将(1.4)式在域  $S$  上积分, 可得积分形式的机械能方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S E ds = & - \int_L E \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dl - \int_L \frac{1}{2} (h + \zeta)^2 g \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dl \\ & + \iint_S g(h + \zeta) \mathbf{U} \cdot \nabla \zeta_c ds - \iint_S C_D |\mathbf{U}|^3 ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

上式的左边表示域  $S$  内总机械能随时间的变化。方程右边, 第一项表示通过开口边界  $L$  流入的能量; 第二项为流体通过开口边界流入域内时压力做的功; 第三项是引潮力对整个区域  $S$  做的功; 第四项是整个区域内底摩擦引起的能量耗散。

## 二、 $|\mathbf{U}| \mathbf{U}$ 的 Fourier 展开

摩擦项为  $\frac{C_D}{h + \zeta} |\mathbf{U}| \mathbf{U} = \frac{C_D}{h} \left( 1 - \frac{\zeta}{h} + \dots \right) |\mathbf{U}| \mathbf{U}$ 。这里仅讨论  $|\mathbf{U}| \mathbf{U}$  的

1) 在推导平均流方程和定义动能时, 假定下式成立:

$$\int_{-h}^{\zeta} \mathbf{U}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{U}(x, y, z, t) dz = (h + \zeta) \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$$

Fourier 展开。若要考虑括号内高阶小量的影响,在得到  $|\mathbf{U}|U$  的展开式后是不困难的。

$\mathbf{U}$  可以写成如下形式

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{\infty} \{U_j \cos(\sigma_j t - \xi_j) \mathbf{i} + V_j \cos(\sigma_j t - \eta_j) \mathbf{j}\} \quad (2.1)$$

其中  $\sigma_j$  是分潮的频率;  $\xi_j, \eta_j$  是迟角;  $U_j, V_j$  为振幅。当  $\sigma_j = 0, \xi_j = \eta_j = 0$  时,  $U_j, V_j$  表示余流。以下各式只取前几项主要分潮,即

$$\mathbf{U} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} \quad (2.2a)$$

$$u = \sum_{j=1}^n U_j \cos(\sigma_j t - \xi_j) \quad (2.2b)$$

$$v = \sum_{j=1}^n V_j \cos(\sigma_j t - \eta_j) \quad (2.2c)$$

因为  $U_j, V_j \geq 0$  和  $|\cos(\sigma_j t - \xi_j)|, |\cos(\sigma_j t - \eta_j)| \leq 1, (j = 1, \dots, n)$ , 所以

$$\left| \frac{u^2 + v^2}{A_0} - 1 \right| \leq 1 \quad (2.3)$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left( \sum_{j=1}^n U_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n V_j \right)^2 \right\} \quad (2.4)$$

利用 Newton 二项式展开定理,有

$$\begin{aligned} |\mathbf{U}| &= (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= A_0^{1/2} \left[ 1 + \left( \frac{u^2 + v^2}{A_0} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= A_0^{1/2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{2} - k + 1 \right)}{k!} \left( \frac{u^2 + v^2}{A_0} - 1 \right)^k \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

由(2.4)式,保证了上式的收敛性。

由(2.2)式,  $u, v$  可写成

$$u = \sum_{j=1}^n \tilde{U}_j \{ e^{i(\sigma_j t - \xi_j)} + e^{-i(\sigma_j t - \xi_j)} \} \quad (2.6a)$$

$$v = \sum_{j=1}^n \tilde{V}_j \{ e^{i(\sigma_j t - \eta_j)} + e^{-i(\sigma_j t - \eta_j)} \} \quad (2.6b)$$

其中  $\tilde{U}_j = \frac{1}{2} U_j, \tilde{V}_j = \frac{1}{2} V_j, (j = 1, 2, \dots, n)$ 。由(2.5)式和(2.6)式可得  $|\mathbf{U}|U$  的展开式

$$\begin{aligned} |\mathbf{U}|u &= A_0^{1/2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \tilde{U}_{\mu} (e^{i(\sigma_{\mu} t - \xi_{\mu})} + e^{-i(\sigma_{\mu} t - \xi_{\mu})}) \\ &+ A_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^l \sum_{\substack{p_j, q_j, \beta_j \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_n = 2r \\ q_1 + \dots + q_n = 2(l-r) \\ \beta_1 + \dots + \beta_n = 1}} (-1)^l \end{aligned}$$

$$\times \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{2} - k + 1 \right) (2r)! (2l - r)!}{A_0^l (k - l)! (l - r)! r!} \cdot \left( \prod_{j=1}^n \frac{\tilde{U}_{j+P_{n+j}+\beta_j+\beta_{n+j}} \tilde{V}_{j+Q_{n+j}}}{P_j! P_{n+j}! Q_j! Q_{n+j}! \beta_j! \beta_{n+j}!} \right) \cdot e^{i \sum_{j=1}^n [(P_j - P_{n+j} + Q_j - Q_{n+j} + \beta_j - \beta_{n+j}) \sigma_j t - (P_j - P_{n+j} + \beta_j - \beta_{n+j}) \xi_j - (Q_j - Q_{n+j}) \eta_j]} \quad (2.7)$$

$$|U|v = A_0^{1/2} \sum_{\mu=1}^n \tilde{V}_{\mu} (e^{i(\sigma_{\mu} t - \eta_{\mu})} + e^{-i(\sigma_{\mu} t - \eta_{\mu})}) + A_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^l \sum_{\substack{P_j, Q_j, \beta_j > 0 \\ P_1 + \dots + P_{2n} = 2r \\ Q_1 + \dots + Q_{2n} = 2(l-r) \\ \beta_1 + \dots + \beta_{2n} = 1}} \frac{1}{A_0^l (k - l)! (l - r)! r!} \cdot (-1)^l \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{2} - k + 1 \right) (2r)! (2l - 2r)!}{A_0^l (k - l)! (l - r)! r!} \cdot \left( \prod_{j=1}^n \frac{\tilde{U}_{j+P_{n+j}} \tilde{V}_{j+Q_{n+j}+\beta_j+\beta_{n+j}}}{P_j! P_{n+j}! Q_j! Q_{n+j}! \beta_j! \beta_{n+j}!} \right) \cdot e^{i \sum_{j=1}^n [(P_j - P_{n+j} + Q_j - Q_{n+j} + \beta_j - \beta_{n+j}) \sigma_j t - (P_j - P_{n+j}) \xi_j - (Q_j - Q_{n+j} + \beta_j - \beta_{n+j}) \eta_j]} \quad (2.8)$$

在一维情况下,我们只需用(2.7)式。当只存在两个波时,(2.7)式可写成

$$|U|U = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} C_{\mu\lambda} U_1^2 \cos [(\mu\sigma_1 + \lambda\sigma_2)t - (\mu\xi_1 + \lambda\xi_2)] \quad (2.9)$$

其中  $C_{\mu\lambda}$  是  $U_1$  和  $U_2$  的函数。在实用中(2.7)式可取有限项。方国洪<sup>[1]</sup>给出的精确解为

$$C_{10}^* = \frac{16}{9\pi^2} [(7 + s^2)E - 4(1 - s^2)K] \quad (2.10)$$

$$C_{01}^* = \frac{16}{9s\pi^2} [(1 + 7s^2)E - (1 + 3s^2)(1 - s^2)K] \quad (2.11)$$

其中  $s = \frac{U_2}{U_1}$ ;  $K, E$  为第一类和第二类完全椭圆积分。为了检验级数展开式的准确度,下表给出  $k \leq 2$  时,  $C_{\mu\lambda}$  的近似值与精确解  $C_{\mu\lambda}^*$  以及相对误差  $\delta$ 。

表1 一维二个波情况下  $|u|u$  展开式系数的近似值和精确值比较

$U_2/U_1$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$C_{10}$	0.8397	0.8533	0.8750	0.9094	0.9572	1.0173	1.0880	1.1677	1.2550	1.3486	1.4473
$C_{10}^*$	0.8488	0.8552	0.8743	0.9058	0.9497	1.0055	1.0727	1.1508	1.2413	1.3371	1.4410
$\delta(\%)$	1.07	0.3	0.08	0.4	0.8	1.2	1.4	1.5	1.1	0.9	0.4
$C_{01}$	0	0.1237	0.2512	0.3800	0.5110	0.6461	0.7874	0.9366	1.0955	1.2654	1.4473
$C_{01}^*$	0	0.1257	0.2560	0.3863	0.5196	0.6567	0.7989	0.9471	1.1047	1.2676	1.4410
$\delta(\%)$	0	3.0	1.9	1.6	1.6	1.6	1.4	1.1	0.6	0.2	0.4

由表 1 可见 (2.9) 式在  $k \leq 2$  时就得到一个良好的近似。 $|U|$  的展开方法可推广到  $|U|^\alpha$  的情况:

$$\begin{aligned}
 |U|^\alpha = A_0^{\alpha/2} & \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^l \sum_{\substack{p_j, q_j > 0 \\ p_1 + \dots + p_n = 2r \\ q_1 + \dots + q_n = 2(l-r)}} \right. \\
 & \cdot \frac{\alpha \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \cdots \left( \frac{\alpha}{2} - k + 1 \right) (2r)! (2l - 2r)!}{A_0^l (k-l)! (l-r)! r!} \\
 & \left. \cdot \left( \prod_{j=1}^n \frac{\tilde{U}_j^{p_j + p_{n+j}} \tilde{V}_j^{q_j + q_{n+j}}}{p_j! p_{n+j}! q_j! q_{n+j}!} \right)^i e^{i \sum_{j=1}^n [(p_j - p_{n+j} + q_j - q_{n+j}) \sigma_j t - (p_j - p_{n+j}) \xi_j - (q_j - q_{n+j}) \eta_j]} \right\} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

### 三、 $|U|^3$ 的 Fourier 展开

在能量方程中我们需要  $|U|^3$  的 Fourier 展开, 可直接采用 (2.12) 式。但为和动量方程一致, 仍用 (2.5) 式。将 (2.5) 式乘以  $u^2 + v^2$ , 可得  $|U|^3$  的 Fourier 级数。在表 2 中我们给出在一维二个波情况下,  $k$  取列 2 时所得的  $|U|^3$  的常数项, 即  $|U|^3$  的时间平均值  $\mathcal{D}$  和由 (2.10), (2.11) 式所得到的精确值  $\mathcal{D}^*$ , 以及相对误差  $\Delta$ 。

表 2 一维二波情况下  $|U|^3$  常数项的近似值与精确值比较

$U_2/U_1$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\mathcal{D}$	0.4198	0.4328	0.4626	0.5117	0.5808	0.6702	0.7802	0.9117	1.0657	1.2437	1.4474
$\mathcal{D}^*$	0.4244	0.4340	0.4627	0.5108	0.5788	0.6669	0.7760	0.9069	1.0626	1.2390	1.4410
$\Delta(\%)$	1.1	0.3	0.03	0.2	0.4	0.5	0.5	0.5	0.3	0.4	0.5

注: 表中  $U_1 = 1$ 。

### 四、 $|U|U$ 的讨论

由 (2.7) 和 (2.8) 式我们得到了各个分潮对应的底摩擦。已知每一个分潮潮流

$$u_i = U_i \cos(\sigma_i t - \xi_i)$$

$$v_i = V_i \cos(\sigma_i t - \eta_i)$$

对应于一潮流椭圆。同样底摩擦  $F$  的  $\sigma_i$  分量  $F_i$  也对应一个椭圆。下面分别讨论单波和双波时潮流椭圆与底摩擦之间的关系。

#### 1. 单波

潮流椭圆的长轴方向为  $x$  轴, 短轴方向为  $y$  轴 (见图 1)。则潮流可表示为

$$u = U \cos(\sigma t - \phi) \quad (4.1a)$$

$$v = \pm V \sin(\sigma t - \phi) \quad (4.1b)$$

记  $C_D F_x$  和  $C_D F_y$  为对应于频率为  $\sigma$  的底摩擦力在  $x$  和  $y$  方向的分量, 并记  $\mu = \frac{V}{U}$ ,

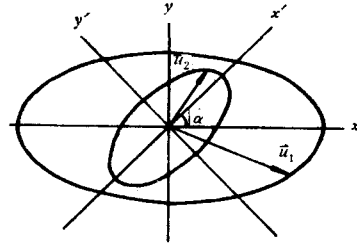


图1 潮流椭圆

$\mu \leq 1$ 。由(2.7)和(2.8)两式,可得

$$F_x = \frac{19 + 34\mu^2 + 11\mu^4}{16\sqrt{2}(1 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}} U^2 \cos(\sigma t - \phi) \quad (4.2a)$$

$$F_y = \pm \frac{11 + 34\mu^2 + 19\mu^4}{16\sqrt{2}(1 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}} \mu U^2 \sin(\sigma t - \phi) \quad (4.2b)$$

(4.1)和(4.2)两式中的“ $\pm$ ”号表示椭圆的旋转方向。还可得底摩擦椭圆的椭圆率  $K$  为

$$K = \frac{11 + 34\mu^2 + 19\mu^4}{19 + 34\mu^2 + 11\mu^4} \mu \quad (4.3)$$

从(4.2)式可见,底摩擦椭圆的旋转方向与潮流是一致的,且长轴与短轴的方向也是一致的。同时  $K$  满足如下不等式

$$0.58\mu \leq K \leq \mu \quad (4.4)$$

亦即,除了  $\mu = 0$  或  $\mu = 1$  的情况外,底摩擦椭圆要比潮流扁。

## 2. 双波

设存在两个分潮,分别记作  $U_1$  和  $U_2$ 。将其相应频率的底摩擦分量记为  $F_1$  和  $F_2$ 。选择  $U_1$  的长轴为  $x$  轴,短轴为  $y$  轴。 $U_2$  的长轴与  $U_1$  的长轴有一交角  $\alpha$ 。为方便起见规定  $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ 。在  $xoy$  坐标中  $U_1$  为

$$u_1 = U_1 \cos(\sigma_1 t - \xi_1) \quad (4.5a)$$

$$v_1 = \pm V_1 \sin(\sigma_1 t - \xi_1) \quad (4.5b)$$

设  $x'oy'$  坐标的  $x'$ ,  $y'$  分别对应于  $U_2$  的长轴与短轴。 $U_2$  可表示为,

$$u'_2 = a \cos(\sigma_2 t - \varphi) \quad (4.6a)$$

$$v'_2 = \pm b \sin(\sigma_2 t - \varphi) \quad (4.6b)$$

在  $xoy$  坐标系中  $U_2$  可表示为

$$u'_2 = U_2 \cos(\sigma_2 t - \xi_2) \quad (4.7a)$$

$$v'_2 = V_2 \cos(\sigma_2 t - \eta_2) \quad (4.7b)$$

其中

$$U_2 = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \quad (4.8a)$$

$$V_2 = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \quad (4.8b)$$

$$\xi_2 = \varphi \pm \arcsin \frac{-b \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}} \quad (4.8c)$$

$$\eta_2 = \varphi \pm \arccos \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} \quad (4.8d)$$

不失一般性,下面设  $U_1 \geq V_1$ ,  $a \geq b$ 。

记  $\mathbf{F}_1$  对应的  $x$  和  $y$  分量为  $C_D F_{1x}$  和  $C_D F_{1y}$ 。根据(2.7)式和(2.8)式

$$\mathbf{F}_1 = C_D \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} = C_D \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \cos(\sigma_1 t - \xi_1) \\ \pm V_1 \sin(\sigma_1 t - \xi_1) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

其中  $A_{ij} = A_{ij}(U_1, V_1, a, b, \alpha)$ , 并满足  $A_{21} = A_{12}$  及

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \geq 0$$

我们还可得  $\mathbf{F}_1$  的椭圆率  $K$  以及长轴与  $x$  轴的夹角  $\alpha$ :

$$K = \frac{\left(\frac{A_{22}}{A_{11}} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}^2}\right)(1 + K^2)\mu}{1 + \frac{A_{12}^2}{A_{11}^2}(1 + \mu^2) + \frac{A_{22}^2}{A_{11}^2}\mu^2} \quad (4.10)$$

$$\varphi = \arctg \left\{ \frac{1 + \mu K}{1 - \left(\frac{A_{22}}{A_{11}}\right)\mu K} \cdot \frac{A_{21}}{A_{11}} \right\} \quad (4.11)$$

其中  $\mu = \frac{V_1}{U_1}$ 。(4.10) 式中  $K$  有两个解,一个是椭圆率,另一个是它的倒数。显然只能取  $K \leq 1$  的解。

根据(4.9)~(4.11)式我们可以得出  $\mathbf{F}_1$  的下列性质:

- (1)  $\mathbf{F}_1$  的旋转方向取决于  $\mathbf{U}_1$  的旋转方向和  $\mathbf{U}_2$  无关。
- (2)  $\mathbf{F}_1$  的偏斜方向与  $\mathbf{U}_2$  的偏斜方向一致,一般有  $|\varphi| \leq |\alpha|$ 。
- (3)  $\mathbf{F}_1$  的椭圆率  $K$  满足不等式  $0.55\mu \leq K \leq 1$ 。

## 五、拖曳系数 $C_D$ 的估算

因为  $C_D$  与海底粗糙度有密切的关系,因而对不同地点有不同的量值。利用(1.5)式只能得到某海区  $C_D$  的一个总体的估计。将(1.5)式在时间  $(-\infty, +\infty)$  区间内求平均,得

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\partial}{\partial t} \iint_S E ds dt &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_L E \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dl dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_L \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} (h + \zeta)^2 g \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dl dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \iint_S g(h + \zeta) \mathbf{U} \\ &\quad \cdot \nabla \zeta ds dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \iint_S C_D |\mathbf{U}|^3 ds dt \end{aligned} \quad (5.1)$$

上式的积分和极限的次序是可交换的。显然等式的左边等于零。等式的右边,每一项都可展成一系列调和项和常数项之和。所有调和项的平均值为零。我们记

$$\mathcal{D} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\mathbf{U}|^3 dt \quad (5.2a)$$

$$\mathcal{E} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dt \quad (5.2b)$$

$$\mathcal{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (h + \zeta)^2 \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dt \quad (5.2c)$$

$$\mathcal{S} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (h + \zeta) \mathbf{U} \cdot \nabla \zeta_c dt \quad (5.2d)$$

上式都等于各自的常数项。同时  $\zeta$ ,  $\nabla \zeta_c$  分别记为

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^n H_j \cos(\sigma_j t - \theta_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \tilde{H}_j [e^{i(\sigma_j t - \theta_j)} + e^{-i(\sigma_j t - \theta_j)}] \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} X &\equiv \frac{\partial \zeta_c}{\partial x} = \sum_{k=1}^n \Phi_{ck} \cos(\sigma_k t - \phi_k - 90^\circ) \\ &= \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{ck} [e^{i(\sigma_k t - \phi_k - 90^\circ)} + e^{-i(\sigma_k t - \phi_k - 90^\circ)}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} Y &\equiv \frac{\partial \zeta_c}{\partial y} = \sum_{k=1}^n \Phi_{nk} \cos(\sigma_k t - \phi_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{nk} [e^{i(\sigma_k t - \phi_k)} + e^{-i(\sigma_k t - \phi_k)}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中  $x, y$  分别为向东和向北的正交笛卡尔坐标。

$$\tilde{H}_j = \frac{1}{2} H_j, \quad \tilde{\Phi}_{nk} = \frac{1}{2} \Phi_{nk}, \quad \tilde{\Phi}_{ck} = \frac{1}{2} \Phi_{ck}.$$

记  $\Sigma(L, M, N, R)$  为求和算子, 它满足

$$\begin{aligned} &\Sigma(L, M, N, R) f_{i_1 \dots i_{2n} j_1 \dots j_{2n} k_1 \dots k_{2n} l_1 \dots l_{2n}} \\ &\equiv \sum_{\substack{i_p, j_p, k_p, l_p > 0 \\ i_1 + \dots + i_{2n} = L \\ j_1 + \dots + j_{2n} = M \\ k_1 + \dots + k_{2n} = N \\ l_1 + \dots + l_{2n} = R \\ \sum_{p=1}^n (i_p - i_{n+p} + j_p - j_{n+p} + k_p - k_{n+p} + l_p - l_{n+p}) \sigma_p = 0}} f_{i_1 \dots i_{2n} j_1 \dots j_{2n} k_1 \dots k_{2n} l_1 \dots l_{2n}} \end{aligned}$$

上式表示对满足 (1)  $i_p, j_p, k_p, l_p \geq 0$  ( $p = 1, \dots, 2n$ ) 为正整数及 (2)  $i_1 + i_2 + \dots + i_{2n} = L$ ,  $j_1 + \dots + j_{2n} = M$ ,  $k_1 + \dots + k_{2n} = N$ ,  $l_1 + \dots + l_{2n} = R$ ,  $\sum_{p=1}^n (i_p - i_{n+p} + j_p - j_{n+p} + k_p - k_{n+p} + l_p - l_{n+p}) \sigma_p = 0$  的所有  $(i_1, \dots, i_{2n}, j_1, \dots, j_{2n}, k_1, \dots, k_{2n}, l_1, \dots, l_{2n})$  求和。同时定义

$$\begin{aligned} &\{\Sigma(L_1, M_1, N_1, R_1) + \Sigma(L_2, M_2, N_2, R_2)\} f_{i_1 \dots i_{2n}} \\ &\equiv \Sigma(L_1, M_1, N_1, R_1) f_{i_1 \dots i_{2n}} + \Sigma(L_2, M_2, N_2, R_2) f_{i_1 \dots i_{2n}} \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} F_{i_1 \dots i_{2n}}^{(a)} &\equiv F_{i_1 \dots i_{2n} j_1 \dots j_{2n} k_1 \dots k_{2n} l_1 \dots l_{2n}}^{(a)} \\ &\equiv n_1^a e^{-i \sum_{p=1}^n [(i_p - i_{n+p}) \xi_p + (j_p - j_{n+p}) \eta_p + (k_p - k_{n+p}) \theta_p + (l_p - l_{n+p}) (\phi_p + 90^\circ)]} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \cdot \prod_{p=1}^n \frac{\tilde{U}_{i_p+i_{n+p}} \tilde{V}_{j_p+i_{n+p}} \tilde{H}_{k_p+k_{n+p}} \tilde{\Phi}_{l_p+l_{n+p}}}{i_p! i_{n+p}! j_p! j_{n+p}! k_p! k_{n+p}! l_p! l_{n+p}!} \\ & + n_2^\alpha e^{-i \sum_{p=1}^n [(i_p-i_{n+p})\eta_p + (i_p-i_{n+p})\xi_p + (k_p-k_{n+p})\theta_p + (l_p-l_{n+p})\phi_p]} \\ & \cdot \prod_{p=1}^n \frac{\tilde{V}_{i_p+i_{n+p}} \tilde{U}_{j_p+i_{n+p}} \tilde{H}_{k_p+k_{n+p}} \tilde{\Phi}_{l_p+l_{n+p}}}{i_p! i_{n+p}! j_p! j_{n+p}! k_p! k_{n+p}! l_p! l_{n+p}!} \end{aligned}$$

上式当  $\alpha = 0$  时表示域  $S$  内的函数, 当  $\alpha = 1$  时表示在域  $S$  边界上的函数。 $n_1$  和  $n_2$  是边界上升法线单位向量的  $x$  和  $y$  分量。我们可得到  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  的表达式:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 2A_0^{1/2} \Sigma(2, 0, 0, 0) F_{i_1 \dots i_{2n}}^{(0)} \\ &+ 2A_0^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^l (-1)^l \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (2r)! (2l - 2r)!}{A_0^l (k-l)! (l-r)! r!} \\ &\cdot \Sigma(2r, 2(l-r), 2, 0) \cdot \left\{ e^{-i \sum_{p=1}^n [(i_p-i_{n+p}+k_p-k_{n+p})\xi_D + (i_p-i_{n+p})\eta_p]} \right. \\ &\cdot \prod_{p=1}^n \frac{\tilde{U}_{i_p+i_{n+p}+k_p+k_{n+p}} \tilde{V}_{j_p+i_{n+p}}}{i_p! i_{n+p}! j_p! j_{n+p}! k_p! k_{n+p}!} + e^{-i \sum_{p=1}^n [(i_p-i_{n+p})\xi_p + (i_p-i_{n+p}+k_p-k_{n+p})\eta_p]} \\ &\cdot \left. \prod_{p=1}^n \frac{\tilde{U}_{i_p+i_{n+p}} \tilde{V}_{j_p+i_{n+p}+k_p+k_{n+p}}}{i_p! i_{n+p}! j_p! j_{n+p}! k_p! k_{n+p}!} \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\mathcal{E} = \{3h \Sigma(3, 0, 0, 0) + 3 \Sigma(3, 0, 1, 0) + g \Sigma(1, 0, 2, 0) + h \Sigma(1, 2, 0, 0) + \Sigma(1, 2, 1, 0)\} \cdot F_{i_1 \dots i_{2n}}^{(0)} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{F} = \{2 \Sigma(1, 0, 2, 0) + 2h \Sigma(1, 0, 1, 0)\} \cdot F_{i_1 \dots i_{2n}}^{(0)} \quad (5.8)$$

$$\mathcal{G} = \{h \Sigma(1, 0, 0, 1) + \Sigma(1, 0, 1, 1)\} \cdot F_{i_1 \dots i_{2n}}^{(0)} \quad (5.9)$$

由上述(5.6)–(5.9)式可以得到拖曳系数的表达式

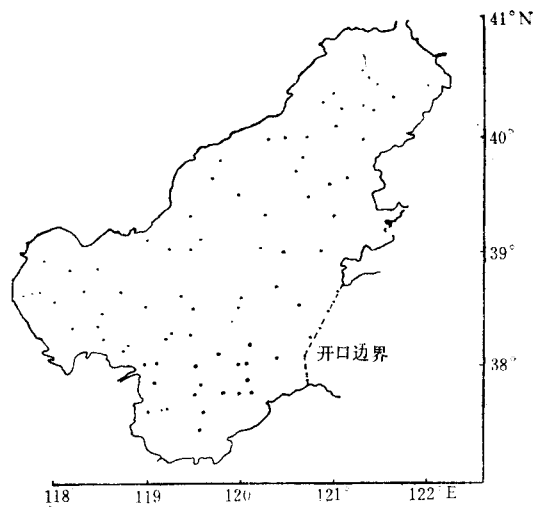


图 2 渤海站位图

$$C_D = \frac{-\int_L \mathcal{E} dl - \int_L \frac{1}{2} g \mathcal{P} dl + \iint_S g \mathcal{Q} ds}{\iint_S \mathcal{D} ds} \quad (5.10)$$

在实际计算中,我们引用了渤海内 82 个站(站位见图 2)上的  $M_2$ ,  $O_1$ ,  $K_1$  三个分潮求得(5.10)式中各项的数值如表 3 所示。

表 3 (5.10) 式中各项的实际计算值

$\iint_S \mathcal{D} ds (\text{m}^3/\text{s}^3)$	$g \iint_S \mathcal{Q} ds (\text{m}^3/\text{s}^3)$	$-\int_L \mathcal{E} dl (\text{m}^3/\text{s}^3)$	$-\frac{1}{2} g \int_L \mathcal{P} dl (\text{m}^3/\text{s}^3)$
$3.77 \times 10^9$	$3.74 \times 10^8$	$9.17 \times 10^4$	$4.49 \times 10^6$

最后求得渤海的拖曳系数  $C_D$  为

$$C_D = 0.0013$$

由表 3 可见渤海的主要能量来源于开口边界的压力做功。引潮力做功相对小一个量级。即  $g \iint_S \mathcal{Q} ds$  只有  $-\frac{1}{2} g \int_L \mathcal{P} dl$  的十二分之一。故渤海主要具有协振潮的性质。

与 Proudman 得出的  $C_D = 0.0026$  相比,我们得到的  $C_D = 0.0013$  比较小,其原因与海底粗糙度有关。

### 参 考 文 献

- [1] 方国洪, 1980. 潮汐摩擦的非线性效应(I) 海洋与湖沼 11(2): 98—107.
- [2] 方国洪, 1981. 潮汐摩擦的非线性效应(II) 海洋与湖沼 12(3): 195—209.
- [3] 普劳德曼, 1953. 动力海洋学(毛汉礼译, 1956). 科学出版社, 329—330 页.
- [4] Dronkers, J. J., 1962. The linearization of the quadratic resistance term in the equation of motion for a pure harmonic tide in a sea. Proc. Symposium Mathematical Hydrodyn. Method Phys. Oceanography. Hamburg, pp. 195—209.
- [5] Dronkers, J. J., 1964. Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters. North Houard Publishing Co., 518pp.
- [6] Garrett, G., 1975. Tides in gulfs. *Deep-Sea Res.* 22(1): 23—35.
- [7] Hunter, J. R., 1975. A note on quadratic friction in the presence of tides. *Estuar. Coast. Mar. Sci.* 3: 473—475.
- [8] Le Provost, C. 1973. Decomposition Spectrale Du Term Quadratique De Frottement Dans Les Equations Des Marees Littorales. C. R. Acad. Sci. Paris, pp. 276, 571—574, 653—656.
- [9] Snyder, R. L., M. Sidjabat and J. H. Filloux, 1979. A study of tides, setup and bottom friction in a shallow semi-enclosed basin. Part II: Tidal model and comparison with data. *J. Phys. Ocean.* 9(1): 170—188.
- [10] Taylor, G. I., 1919. Tidal friction in the Irish Sea. *Phil. Trans. Roy. Soc.* A220: 1—93.
- [11] Pingree, R. D., 1983. Spring tides and quadratic friction. *Deep-Sea Res.* 30: 929—944.

## AN EXPANSION OF $|U|U$ IN FOURIER SERIES AND THE DRAG COEFFICIENT $C_D$ IN THE BOHAI SEA\*

Zhou Meng and Fang Guohong

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao*)

### ABSTRACT

The bottom friction plays an important role in the interaction between tidal constituents. To study the interaction of the constituents through the friction, the quadratic bottom friction term is expanded into a Fourier series form. Many useful results are obtained.

Starting from the nonlinear momentum equations, we obtain the mechanical energy equation. The balance of the mechanical energy in the Bohai Sea is discussed with the mechanical energy equation. By using the above Fourier series, a method to calculate the average drag coefficient  $C_D$  in a certain area is deduced from the mechanical energy equation. This method is applied to the Bohai Sea and an estimate of  $C_D=0.0013$  is obtained.

---

\* Contribution No. 1376 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.