

对流扩散问题的准分析模型

张二骏 高飞 邵桦

(河海大学,南京)

提要 本文采用剖开算子法将二维对流扩散方程分裂为对流过程、扩散过程以及源汇项三部分,然后用各自相应的、便利的解析方法求其解析解,从而找出问题的准解析解,并且在三角形网格上求解二维问题,得到了较为满意的结果。文中还分析了准解析解与解析解在对流扩散问题上的一致性;并将该法用于电厂周围温水排放计算,通过与其它方法计算结果比较表明,该法不仅能较好地模拟电厂周围的温度分布情况,而且具有物理概念明确、计算速度快、稳定性好以及与计算区域吻合好的优点。

准分析法用于二维不恒定流动计算已获得较为满意的结果^[1],由于准分析法将各分裂算子方程用解析法求解,因而算法简便,稳定性好,并且对于区域采用三角形网格,能适应不规则的几何形状和各种边界条件,克服了目前常用数值方法的不足,本文将准分析法原理用于求解二维对流扩散方程,并且证明了准解析解与解析解的一致性。

一、准分析模型的推导

二维水环境污染问题可以用下述对流扩散方程描述:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + f(T) \quad (1)$$

局地变化项 对流项 扩散项 源汇项

式中, u, v 分别为沿 x, y 方向的延伸平均流速,在本文中假定已由二维非恒定方程求得; T 为扩散物的浓度或温度; D_x, D_y 为扩散系数。问题的初始条件:

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y)$$

及边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{陆域边界: } \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ (} n \text{ 法线方向)} \\ \text{水边界:} \\ \text{流入计算域时: } T = T^* \text{ (已知)} \\ \text{流出计算域时: } \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

由于方程(1)包括对流项、扩散项以及源汇项,加上一般计算问题的区域其边界条件复杂并且边界形状任意,因此从解析意义下求解方程(1)在条件(2)下的解显然不可能,但

是可以用准分析法来解决这个问题。

首先将方程(1)按照各项的物理意义在时步长 $[t, t + \Delta t]$ 内剖分为三部分。

1. 对流过程

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u \frac{\partial T_1}{\partial x} + v \frac{\partial T_1}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

2. 扩散过程

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) \quad (4)$$

3. 源汇项

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = f(T_3) \quad (5)$$

它们的初始条件依次为:

$$T_{10}(x, y, 0) = T(x, y, 0) = T_0(x, y)$$

$$T_1(x, y, n\Delta t) = T_{10}(x, y, n\Delta t) \quad (6)$$

$$T_2(x, y, n\Delta t) = T_1[x, y, (n+1)\Delta t] \quad (7)$$

$$T_3(x, y, n\Delta t) = T_2[x, y, (n+1)\Delta t] \quad (8)$$

式中, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。 N 为计算时段。

这样便得到三个便于求解的简单偏微分方程, 依次在时步 $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ 内求解, 就得到原问题的准分析解:

$$T[x, y, (n+1)\Delta t] = T_3[x, y, (n+1)\Delta t] \quad (9)$$

式中, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。

现分别对方程(3)–(5)在初始条件(6)–(8)下寻找它们的解析表达式。

对于方程(3)所描述的物理现象, 显见是一个双曲过程。双曲型方程具有向下游的极性, 如果流场已知, 则方程对于每个时步, 可以认为是线性的, 由特征线法可知, 沿特征线方程:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dT_1}{dt} = 0 \quad (10)$$

也就是说, 温度(或浓度)沿特征线保持常数, 因此只要给定 $t = n\Delta t$ 时刻的值 T_1 , 容易根据特征线方程确定 $t = (n+1)\Delta t$ 时刻的 T_1 值^[2]:

$$T_1[x, y, (n+1)\Delta t] = T_1(x - u\Delta t, y - v\Delta t, n\Delta t)$$

而 $T_1(x - u\Delta t, y - v\Delta t, n\Delta t)$ 的值正好由(6)式给定。

接着求(4), 这是一个抛物型方程, 若假设 D_x, D_y 沿程变化较小, 近似视作常数, 则扩散系数可以从微分号中提出, 即有:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \quad (11)$$

设算子 F , 使得对于任意的 n , 有

$$[n\Delta t, (n+1)\Delta t] \xrightarrow{F} [0, t]$$

则(11)在初始条件(7)下的解为:

$$\begin{aligned}
 T_2(x, y, t) &= \iint_0^a \frac{T_2(\xi, \eta, 0)}{4\sqrt{\pi D_x t} \sqrt{\pi D_y t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4D_x t} - \frac{(y-\eta)^2}{4D_y t}\right) d\xi d\eta \\
 &= \iint_0^a G(x, y, t; \xi, \eta) T_2(\xi, \eta) d\xi d\eta
 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $G(x, y, t; \xi, \eta)$ 为格林函数, 其表达式如下:

$$G(x, y, t; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4D_x t} - \frac{(y-\eta)^2}{4D_y t}\right) \quad (13)$$

由于抛物型方程的重要特性是传播速度无限大, 因而区域内任一点有微小干扰, 瞬时可以传遍全域。也就是说, 区域中某一点有微小的温度或浓度变化, 在区域各点都相应地有所变化, 但是这个概念中包含了质点运动和分子运动, 由于分子运动所产生的量值变化非常小, 因此在传导及扩散过程中仅利用了流传播的现象而没有计及分子运动过程中的惯性。下面分析格林函数 G 在区域内的分布, 从而得出积分表达式(12)的计算式。

考虑一维格林函数, 其物理意义表示位于点 ξ 上的瞬时点源对 x 点的影响函数。见图 1。

$$G(x, t; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} G' \quad (14)$$

式中, $\theta = Dt$ 。

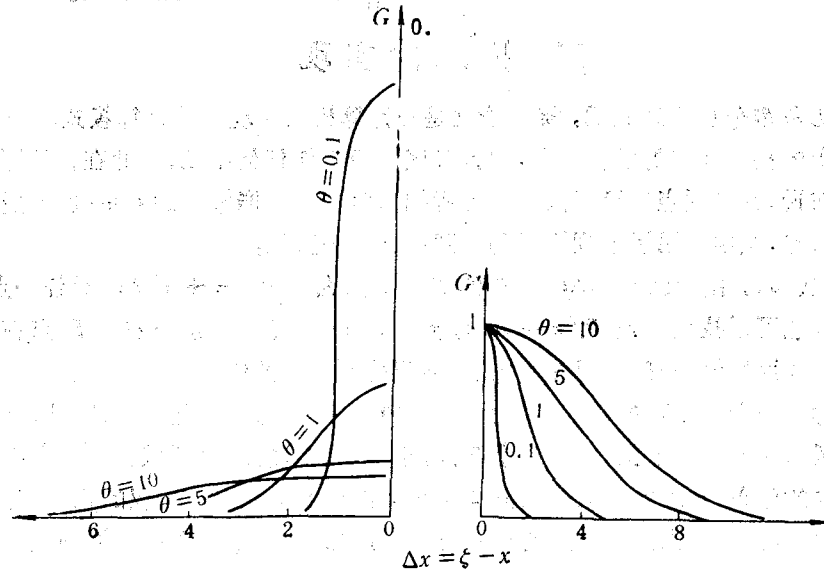


图 1 G, G' 分布图

Fig. 1 The Distribution of Green Function G, G'

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} G'; \quad G' = \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}\right)$$

在 $x = \xi$ 点, $G' = 1$, 当 $x = \xi + \Delta x$, 则 G' 为 0.001。对于不同的 θ , Δx 取不同的值 (见表 1)。

显见, θ 越小, ξ 点的值对 x 的影响范围越小, 因为如果 Δt 取得足够小, 则 G 完全由

表 1 Δx 随 θ 的改变值Tab. 1 The change of Δx with θ

θ	Δx
10	16.6226
5	11.7539
1	5.2563
0.1	1.6623

ξ 周围点的值所确定。事实上, D 一般较小, 如果取 $D = 0.05$, 对于 $\theta = 10$, 则 Δt 可达到 200s。这样可以将积分表达式(12)改写成:

$$T(x, y, t) = \sum_i G(x, y, t; \xi_i, \eta_i) T_0(\xi_i, \eta_i; 0) \Delta \xi_i \Delta \eta_i \quad (15)$$

最后求解方程(5), 这是一个关于时间导数的常微分方程, 在对流扩散问题中, 一般地取 $f(T_3) = a + bT_3$, 这样(5)式变为

$$\frac{dT_3}{dt} = a + bT_3$$

$$\text{易解 } T_3 = T_2 \exp(bt) + \frac{a}{b} (\exp(bt) - 1) \quad (16)$$

至此, 求得了剖分后各方程的解析表达式, 即得到了原方程的准解析式。

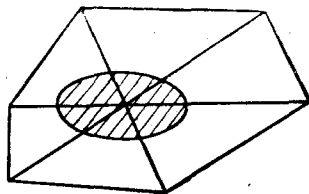
二、模式的实现

得到了方程准分析表达式后, 接下来就是在计算机上实现上述计算模式。由于以上求解是区域上的柯西问题的解析表示, 对计算区域没有作任何限制, 因此在计算区域中网格可以任意布设, 并且逐点计算不须联立方程组求解。为了能够对边界更确切地模拟, 灵活布设计算节点, 文中采用了不规则三角形网格来划分区域。

对于解式(10), 由于已知 $n\Delta t$ 时刻的值 T_0 , 那么对于 $(n+1)\Delta t$ 时任一点 $P(x, y)$, 沿特征线总可以找到一点 $P_1(x - u\Delta t, y - v\Delta t)$ 与之对应。这样由 P_1 点在单元内由各节点经过线性插值(一般采用面积插值)便可得到 P 点的值。

解式(15)是一个有限项的和式, 由于 D_x 一般不等于 D_y , 因此对于计算区域内任一点它的影响区域并不是一个圆, 而是一个椭圆, 也就是该点的决定区域也是一个椭圆。根据格林函数 G 的分布, P 点的 T 值便由图 2 中阴影部分的 T 值以 G 为权的积分和。

至于(16)式, 由于方程仅是时间的常微分方程, 因此它与空间变量无关, 便于实现。

图 2 P 点决定域Fig. 2 Determinate region of P

三、准分析解与解析解的一致性

为了说明准分析解的适用性, 以下用一维对流扩散问题来分析准分析解与解析解之间的关系。

考虑一维对流扩散方程(无源项):

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & 0 < t \leq \tau \\ T(x, 0) = T_0(x) \end{cases} \quad (17)$$

根据(一)中提出的模式, 仍在 $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ 内求其准分析解:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t} + u \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \\ T_1(x, 0) = T_0(x) \end{cases} \quad (18)$$

及

$$\begin{cases} \frac{\partial T_2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \\ T_2(x, 0) = T_1(x) \end{cases} \quad (19)$$

由(18)式得:

$$T_1(x, t) = T_0(x - ut) \quad (20)$$

这里假设 u 为已知常量。由(19)式得:

$$T_2(x, t) = \int_l \frac{T_1(\xi, 0)}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) d\xi \quad (21)$$

将(20)式结合(18)式中的条件代入(21)得:

$$T_2(x, t) = \int_l \frac{T_0(\xi - ut)}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) d\xi \quad (22)$$

则

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_2(x, t) \\ &= \int_l \frac{T_0(\xi - ut)}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) d\xi \end{aligned} \quad (23)$$

在任一时步 $[0, t]$ 内成立, 式中 l 为 $(-\infty, +\infty)$ 。

可以证明(23)式满足原方程, 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_l \frac{-(x - \xi)T_0(\xi - ut)}{2Dt^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) d\xi \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_l \left[-\frac{T_0(\xi - ut)}{2Dt^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x - \xi)^2 + T_0(\xi - ut)}{4Dt^{5/2}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) \right] d\xi \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_l \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} T_0(\xi - ut) \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{t^{3/2}} T_0'(\xi - ut)(-u) \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4Dt}\right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{t^{1/2}} T(\xi - ut) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right) \frac{(x-\xi)^2}{4Dt^2} d\xi$$

这里假设 u 为常量。将 $\frac{\partial T}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 代入对流扩散方程(17), 并且考虑到这样事实:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \int_t^\infty -\frac{u}{t^{1/2}} T_0(\xi - ut) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_t^\infty T_0(\xi - ut) \frac{x-\xi}{2Dt} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right) d\xi \end{aligned}$$

上式中用到

$$|T_0(x)| \leq M, (M > 0)$$

且

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right) = 0$$

则式(23)满足方程(17)。

接着证明式(23) 满足初始条件, 即证明对任何 x_0 , 当 $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_0$ 时, $T(x, t) \rightarrow T_0(x_0)$ 。为此要证明对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 一定可找到这样的 $\delta > 0$, 使得 $|x - x_0| < \delta$, $t < \delta$ 时, 下式成立:

$$|T(x, t) - T_0(x_0)| < \varepsilon$$

令 $\zeta = \frac{\xi - x}{2\sqrt{Dt}}$ 代入(23), 则

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty T_0(x + 2\sqrt{Dt}\zeta - ut) e^{-\zeta^2} d\zeta$$

又

$$T_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty T_0(x_0) e^{-\zeta^2} d\zeta$$

故

$$\begin{aligned} & T(x, t) - T_0(x_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty [T_0(x + 2\sqrt{Dt}\zeta - ut) - T_0(x_0)] e^{-\zeta^2} d\zeta \end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 现取 N 足够大, 使得:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-\zeta^2} d\zeta < \frac{\varepsilon}{6M}$$

现固定 N , 由于 $T_0(x)$ 的连续性, 可找到 $\delta > 0$, 使得 $|x - x_0| < \delta$, $t < \delta$ 时成立:

$$|T_0(x + 2\sqrt{Dt}\zeta - ut) - T_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (-N < \zeta < N)$$

且 $|T_0(x)| < M$, 故可得

$$|T(x, t) - T_0(x_0)| < \varepsilon$$

至此, 我们得证(23)式满足(17)方程及初始条件。由于(23)式为准分析法所得, 反复应用该式, 可得在 $(0, +\infty)$ 时间轴上在 $t = n\Delta t$ 时与解析法一致的结果。

四、例题验证

对流扩散问题广泛地存在于人类生活环境中, 因而正确地模拟电厂温排放或排污场污染物排在自然环境中的分布问题具有重要意义。

为了验证本模式的适用性, 准分析模式建立后就拟建中的某电厂实际水域进行了计算, 验证了某特征潮时的流场及水位, 并且计算了该流场时温排放扩散过程。

图 3 为流场验证计算结果, 计算采用了 88 个节点, 100 个三角形单元, 在边界变化大的地方, 网格较密, 单元最小间距 200m。计算域内有一观测站, 根据同步观测资料表明, 水位吻合是令人满意的(图 3a)。图 3b 为本模式流速计算值与控制体积法计算值的比较结果, 其变化趋势是一致的。

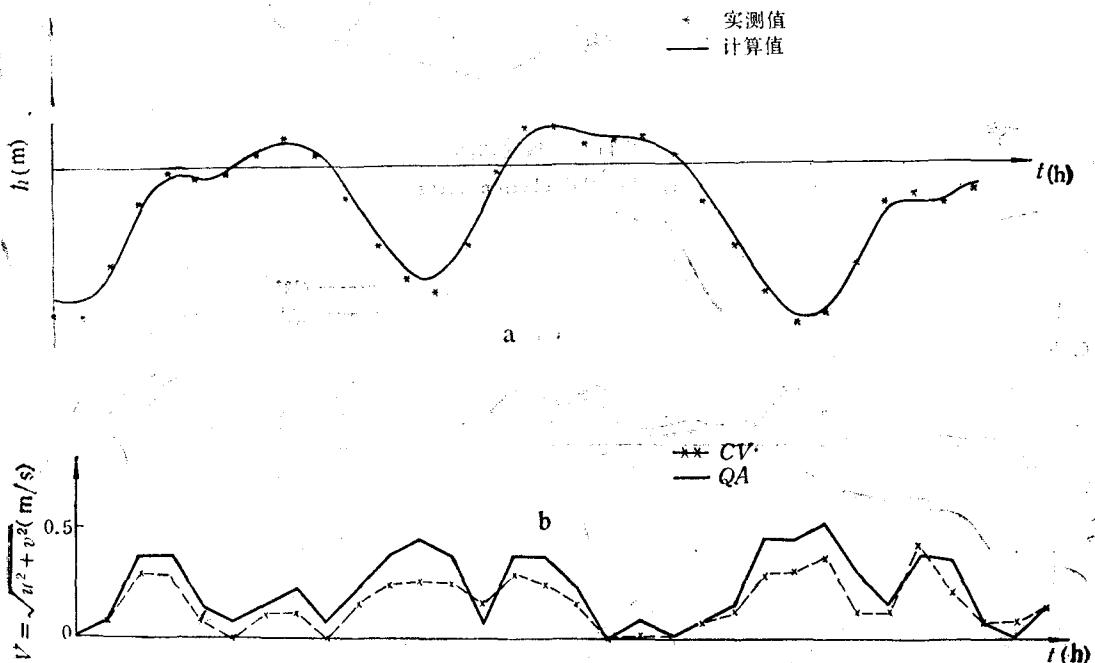


图 3 水位和流速过程线

Fig. 3 The process of water level and velocity

a. 水位; b. 流速。

图 4 为温度场计算结果。图 4a 是计算网格, 由于在取水口、排水口处加密了网格, 所用计算采用 100 个节点、145 个单元。图 4b 为取水口及排水口温升过程线, 皆为与控制体积法比较结果。

图 5, 6 分别展示了控制体积法与准分析法计算的温升分布图, 由图上可见, 两种方法的计算结果是相近的。

通过计算可以看出, 计算结果较好地模拟了实际海域电厂附近温度场的分布情况, 为工程实施提供了可靠的设计依据。并且在模式方面, 我们认为至少存在以下优点。

(1) 分裂时考虑了物理意义和数学求解的便利、迅速。因而概念清楚, 条理明确, 便

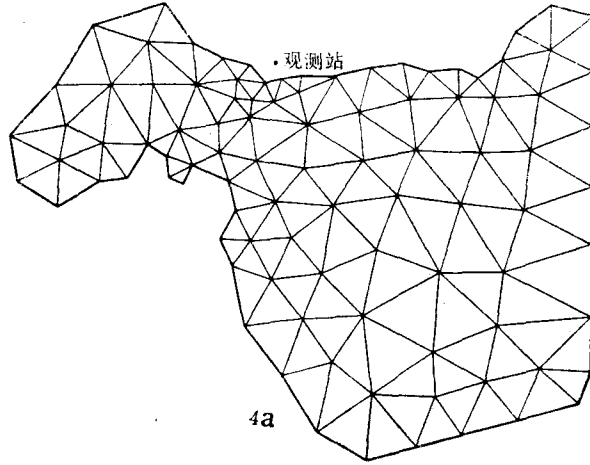


图 4a 计算网格图
Fig. 4a Calculation mesh

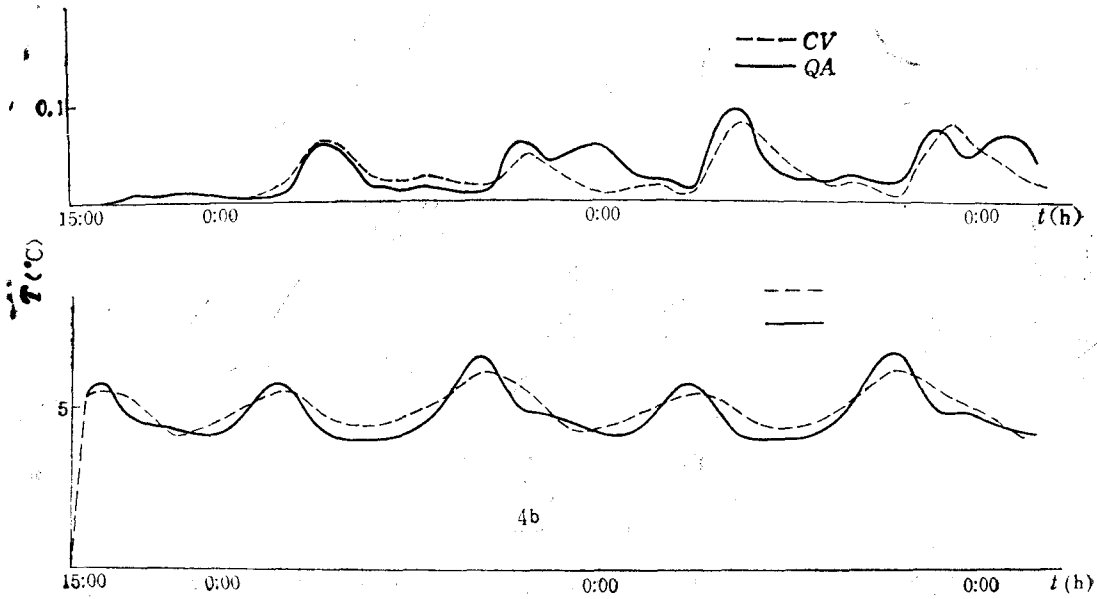


图 4b 取、排水口温升过程线
Fig. 4b The process of temperature around intake and discharge

于实现。

(2) 计算采用了显式表达式处理,不需求解联立方程组,因而计算速度快、机器存量小。

(3) 由于各方程是通过解析法求得,是各分裂方程的精确解,所以计算稳定性好,不

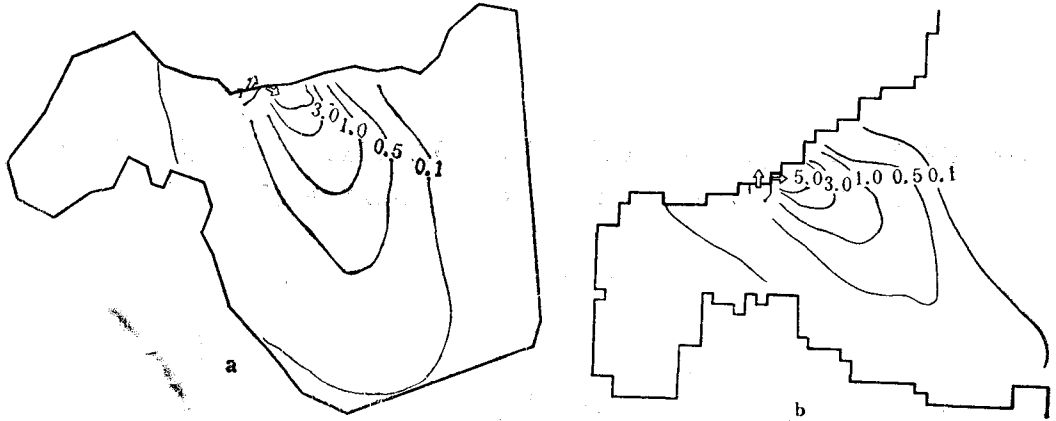


图 5 落潮时温升分布图

Fig. 5 The distribution of temperature in Ebb Tide

a. QA 法; b. CV 法。

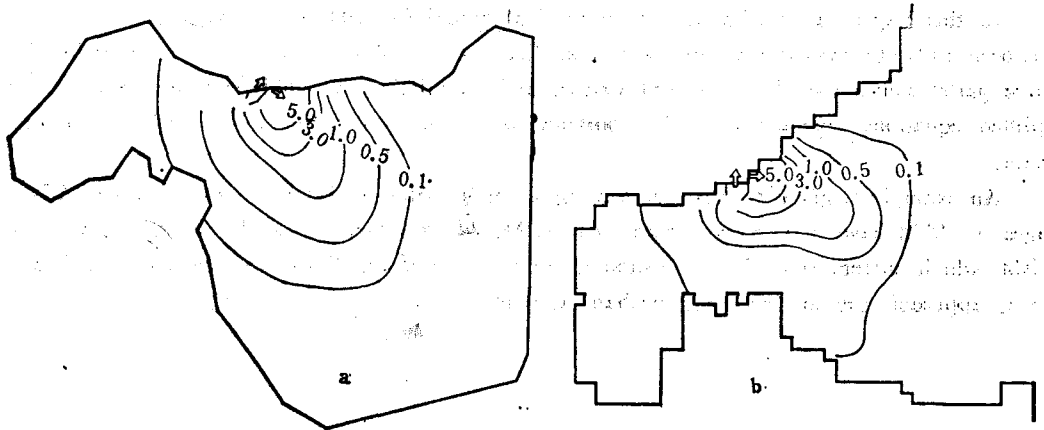


图 6 涨潮时温升分布图

Fig. 6 The distribution of temperature in flood tide

a. QA 法; b. CV 法。

会产生太大的数值耗散。

(4) 在模式实现方面, 采用了任意剖分的三角形网格, 对区域划分灵活, 边界吻合好。

由于方法简便迅速、机存量小, 可望今后在模式不断完善的基础上, 将准分析法用于更广泛领域的计算。

参 考 文 献

[1] 高 飞、张二骏, 1986. 局部一维准分析法的二维非恒定流动的数学模型. 水利水运科学研究 1:65—75.

[2] 吴江航, 1985. 数值模拟水环境污染的一种 L_∞ 稳定的分布杂交方法. 水动力学研究与进展 1:27-35.

QUASI-ANALYTICAL METHOD FOR THE CALCULATING IN 2-D CONVECTION DIFFUSION PROBLEM

Zhang Erjun, Gao Fei and Shao Hua

(Hohai University, Nanjing)

ABSTRACT

For the purpose of avoiding disadvantages of FDM and FEM in calculating multi-dimension problems, the authors presented a new numerical approach-QAM (Quasi-Analytical Method) of solving engineering and mathematical differential equations with initial-boundary value in 1984. Differing from FDM and FEM, QAM deals with the differential equation by finding a approximate integral expression directly rather than discretizing and solving a large linear algebraic equation.

In this paper, a quasi-analytical numerical model for 2-D convection-diffusion equation has been set up to calculate a real convection-diffusion problem by splitting the equation into three parts: convection, diffusion and source, and calculating the analytic expressions of every splitted equations seperately. The computation is performed on the nodes of triangular mesh.

An example is given to solve the heating water distribution from a power station. Advantages of QAM have been proved both over FDM, which subjects to grids restriction, and over FEM which suffers from larger computer time. Therefore, QAM can be considered as a better approach for solving hydromechanical problems.