关于鱼的生长方程的研究*

I. 鱼的生长方程的修正

赵 维 谦
(青岛海洋大学应用数学系,青岛 266003)

提要 指出 von Bertalanffy 生长公式的局限性在于公式导出时所用假设“鱼的体重增加量同体重的 2/3 次方成比例,减少量同体重成比例”的根据不充分;其不足之处在于解方程时将变量 l 误为鱼的体长。本文作了更为一般的假设,即鱼的体重增加量同体重的 p 次方成比例;减少量同体重的 q 次方成比例。进而通过严格的数学推导,得出鱼的更为一般的生长方程 $w = w_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}]^r$, 使 von Bertalanffy 生长公式是该方程的特殊情形.

关键词 鱼 体重 生长方程 修正

鱼的体重的增长曲线多呈S形。陈大刚等(1984)指出,鱼类种群一个世代的个体体长 $L(t)$ 和个体体重 $W(t)$ 是一个二元随机过程 $\{[L(t), W(t)], 0 \leqslant t \leqslant t_\lambda\}$。研究鱼的生长,即分别讨论它们的数学期望 $l(t) = E[L(t)], w(t) = E[W(t)]$ 关于年龄 t 的变化规律,以及它们之间的关系。在已有的鱼的生长公式中,von Bertalanffy 生长公式应用较为普遍。本文指出了该公式的局限性,并将其修正、推广,进而导出了更为一般的生长方程。

1 von Bertalanffy 生长公式的局限性及其导出过程中的问题

许多文献(山东省海洋水产研究所编,1977;刘蝉馨,1981;陈大刚等,1984;扎索索夫,1979)指出,von Bertalanffy 从新陈代谢角度看生长各瞬间体重的增量(同化作用)同体重的 2/3 次方成比例,减少量(异化作用)同体重成比例,二者之差出现生长. 从这一设想出发,得出各瞬间增重的方程:

$$\frac{dw}{dt} = aw^{2/3} - bw \tag{1}$$

式中,w 为鱼的个体体重;t 为连续年龄;a 为同化系数,b 为异化系数,a,b 均为大于0的常数。

令
$$w^{2/3} = hl^2 \text{ 或 } w = cl^3 \tag{2}$$

代入(1)式得:
$$l(t) = l_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}] \tag{3}$$

$$w(t) = w_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}]^3 \tag{4}$$

---

* 自选课题。

收稿日期: 1993年6月29日,接受日期: 1993年10月10日。

(3)式中 l 为鱼的个体体长。对此，有两点是值得讨论的。第一，von Bertalanffy 设想中的"体重增量同体重的 2/3 次方成比例，减少量同体重成比例"具有局限性，其根据不充分。第二，求解方程(1)时，(2)中的变量 l 断定为鱼的体长，这种假设性就太大了。因为从数学方法来说，这纯粹是求解的需要，是一种变量代换，因之不写 l 而写为 x, y 之类变量也是可以的。也许，体重 w 和体长 l 是有这种关系，但要有充分的论证和适当的检验。

2　推广了的鱼的生长方程

现在假设各瞬间鱼的体重的增加量(同化作用)同体重的 p 次方成比例，减少量(异化作用)同体重的 q 次方成比例，二者之差出现生长，由此得微分方程：

$$\frac{dw}{dt} = aw^p - bw^q \tag{5}$$

式中，参数 a, b 为式(1)中所说的同化系数和异化系数，$a > 0, b > 0$；p, q 为新引进的两个参数，并满足 $p > 0, q > 0$。

若增设体重关于年龄的生长曲线是 S 形的，则尚需满足

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = w_\infty < +\infty \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dw}{dt} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{dw}{dt} = w'(t) \geqslant 0,\ 当\quad t > 0\quad 时 \tag{8}$$

$$\lim_{t\to t_0} w(t) = 0 \tag{9}$$

式中，t_0 作为体重等于零的时刻。以上(6)—(9)式的假设是符合实际的，也是不难想象的。(6)式说明鱼的渐近体重 w_∞ 为一有限数，(7)式说明鱼的体重的增长速度随年龄无限增长而趋于零。(8)式的成立是因为鱼的个体体重 $w(t)$ 的含义为本文引言所说的，即 $w(t)$ 为所论鱼群的所有 t 龄鱼的平均个体体重。

定理 1　满足(5)—(8)式的参数 a, b, p, q 具有关系：

$$a > b, p < q \tag{10}$$

证明　由(5)，(6)，(7)得 $aw_\infty^p - bw_\infty^q = 0$

即

$$\frac{a}{b} = \frac{w_\infty^q}{w_\infty^p} \tag{11}$$

再由(8)知，$w'(t) \geqslant 0$，以及当 t 为某时刻 t_1 时有 $w(t_1) = 1$，故由(5)知：$a - b \geqslant 0$，再由(11)得：

$$\frac{w_\infty^q}{w_\infty^p} \geqslant 1 \tag{12}$$

显见，$w_\infty \geqslant 1$，故可得 $p \leqslant q$。但当 $p = q$ 时，由(11)知 $a = b$，此时(5)为

$$\frac{dw}{dt} = 0$$

其解为 $w(t) \equiv C$（常数），$w(t)$ 的图形是平行于 t 轴的直线而不呈 S 形。当然也可以看作 S 形的一种极端情形，但它没有实际意义。故 $p \neq q$，从而 $a \neq b$，这样便证明了(10)。

定理 2 当满足(5)—(9)式时，有 $p < 1$ (13)

证明 由(5)得：
$$\int_0^w \frac{dw}{aw^p - bw^q} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0 \tag{14}$$

由(9)式成立，要求(13)在 $t = t_0$ 处左端积分在 $w = 0$ 处收敛，由定理 1 知 $p < q$，再由广义积分收敛的条件可得 $p < 1$。

定理 3 方程(5)在 $a > b > 0, p < q, 0 < p < 1$ 时解的形式为：
$$\int \frac{dz}{a(1-p) - b(1-p)z^{\frac{q-p}{1-p}}} = \int dt \tag{15}$$

式中，$z = w^{1-p}$。特别当 $q = 1$ 时，(5)的解为：
$$w = w_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}]^r \tag{16}$$

式中，
$$w_\infty = \left[\frac{a}{b}\right]^{1/(1-p)},\ k = b(1-p), r = 1/(1-p) \tag{17}$$

证明 令 $w = z^{1/(1-p)}$ 即 $z = w^{1-p}$ 代入(5)得：
$$\frac{dz}{dt} = a(1-p) - b(1-p)z^{(q-p)/(1-p)}$$

对此分离变量积分得(15)。在(15)中，当 $\frac{q-p}{1-p}$ 为有理数时，即 $\frac{q-p}{1-p} = \frac{m}{n}$，其中 m, n 为正整数，左端积分可为有限形式，但形式比较复杂不便于应用。但当 $q = 1$ 时，(15)为
$$\int \frac{dz}{a(1-p) - b(1-p)z} = \int dt,$$

注意到 $w(t)$ 满足(6)，(9)，经运算可得：
$$w = \left[\frac{a}{b}\right]^{1/(1-p)}[1 - e^{-b(1-p)(t-t_0)}]^{1/(1-p)}$$

再由(17)便得(16)成立。

3 结语

在(16)中，当 $p = 2/3$ 时，$r = 3$，说明 von Bertalanffy 的假设与结果仅为这里的特殊情形，从而鱼的体重生长方程(16)具有更为普遍的意义，适用的面更广。直接由方程(16)出发，合理地估计参数，定会更为准确地掌握鱼的生长规律。事实上，由
$$r = \frac{1}{1-p} \text{ 或 } p = 1 - \frac{1}{r}$$

易知，当 r 较大时，p 就较大，联想到 p 的意义，将知道该类鱼同化作用较强，生长较快，这就给出了参数 r 的生物学意义，进而当方程(16)中的参数 w_∞, k, t_0, r 被完全确定之后，则方程(5)中的同化系数 a 和异化系数 b 等参数就能反推出来，从而刻化鱼体体重的增长与“同化”、“异化”作用在各瞬间相互联系的数学模型，即方程(5)将为之确定。显然，这些都将具有理论和实践的意义。近些年来，有些学者凭自己的经验和猜测(陈万青等，1986；唐启升，1980；钱世勋等，1980)，不用方程(4)而用方程(16)来拟合鱼的体重的生长，本文

为之作了较好的论证，使之具有生物学意义。

参　考　文　献

山东省海洋水产研究所编，1977，水产资源数量变动模式简说，国外海洋水产，**1**:32—35。
刘蝉馨，1981，黄渤海蓝点马鲛年龄的研究，鱼类学论文集，第一集，科学出版社（北京），39—40，125—131。
陈大刚等，1984，黄渤海牙鲆的年龄与生长的初步研究以及关于 von Bertalanffy 生长函数的修改和讨论，山东海洋学院学报，**14**(1)：102—109。
陈万青、赵维谦，1986，黄海鲬年龄和生长的初步研究，水产学报，**10**(3)：289—304。
唐启升，1980，太平洋鲱的性成熟、生殖力和生长特性的研究，海洋水产研究，**1**：86—98。
钱世勋等，1980，绿鳍马面鲀年龄与生长的初步研究，水产学报，**4**(2)：88—96。
扎索索夫，**A. B.** 著，朱德山译，1979，渔业的理论研究，农业出版社（北京），168—172。

STUDY ON THE FISH GROWTH EQUATION

I. A MENDMENT TO THE FISH GROWTH EQUATION

Zhao Weiqian

(Applied Methematics Department, Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003)

Abstract

In this paper, it is pointed out that von Bertalanffy's assumptions that the increase of the fish weight is proportional to 2/3 power of the body weight and the decrease is proportional to the weight have certain limitation and deficencies in the grounds. Meanwhile, it is groudless that the variable "l" in the equation (2) is taken as the body length of fish in solying the equation (1). For this reason, it is put forward that the increase of the body weight of fish is proportional to p power of the weight and its decrease to q power. Their differences induce the growth of fish and the equation (5) is derived:

$$\frac{dw}{dt} = aw^p - bw^q \tag{5}$$

In the assumption that the growth curve of the weight against the age is type "S", another more concrete and more realistic assumptions are made in this study. In the basis of strictly mathematical derivation, the parameters a, b, p, q in equation (5) have the relations: $a > b; p < q$. When $a > b > 0$, $p < q$, $0 < p < 1$, the solution of the equation (5) is as following:

$$\int \frac{dz}{a(1-p) - b(1-p)z^{\frac{q-p}{1-p}}} = \int dt \tag{15}$$

Especially, when $q = 1$, the solution of the equation (5) is

$$w = w_\infty[1 - e^{-k(t-t_0)}]^r \tag{16}$$

In the formula (16), $r = 3$ when $p = 2/3$, this means that the von Bertalanffly's supportions are only one special case of the equation (16).So the equation (16) is of universal significance and wide utilization. On the basis of the equation (16), if the parameters are estimated reasonably, the growth law of fish is able to be understanded much better.

Key words Fish Body weight Growth equation Mendment