

## 海面对风应力的非定常响应\*

陈水明

(国家海洋局第一海洋研究所, 青岛 266003)

**提要** 针对常垂直湍流系数和变垂直湍流系数两种情况, 给出了开阔静止海面对风应力的非定常响应的解析表达式, 并讨论了水深、风应力强弱对响应过程的影响。尽管没有考虑风场的非定常性, 但本文的结果对理解海洋对风应力的非定常响应过程具有一定的帮助, 对分析海面停风后的消衰过程也具有实际意义。通过与实测资料比较, 认为变垂直湍流系数模式要比常垂直湍流系数模式更为合理。

**关键词** 非定常响应 Ekman 模式 垂直湍流系数

人们对风生流的非定常问题一直有较大的兴趣。(Ekman 模式), 人们早已得到了无限深和有限深海的非定常线性风生流解(路季平, 1984)。本文将侧重讨论其非定常性质。另外, 基于变垂直湍流系数模式, 给出了一个深海风生流的非定场解, 通过与实测比较, 发现这个解比 Ekman 模式更为合理。

为便于解析讨论, 本文中的风应力水平均匀, 于是对正压的等深(包括无限深)开阔海, 可以略去水平侧摩擦及水平压力梯度项。

### 1 Ekman 模式

在正压控制方程中略去非线性项, 水平侧摩擦及压力梯度项, 取  $z$  轴向下为正, 其它符号如通常情况

(图1)。垂直长度特征值  $D = \sqrt{A_v/f}$ , 时间用  $t$  来无量纲化, 记速度特征值为  $U$ , 将风应力用  $\rho A_v U/D$  来无量纲化, 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + iw = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ t = 0, w = 0; z = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = -\tau; z = h(\infty), w = 0 \end{cases} \quad (1)$$

复速度  $w = u + iv$ , 应注意到(1)式中各量已被无量纲化,  $\tau$  为常数。这里  $A_v$  为一常数, 这即是 Ekman 模式的特征。

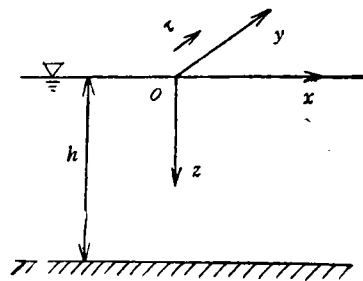


图1 坐标系

Fig. 1 Coordinate system

\* 国家自然科学基金资助, 49070252 号。

收稿日期: 1992年4月12日, 接受日期: 1993年9月30日。

作关于  $t$  的 Laplace 变换  $L\{w(t, z)\} = w(s, z)$ , 得到:

$$(s+i)w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}; z=0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\tau}{s}; z=h, \quad w=0$$

其解为

$$w = \frac{\tau \operatorname{sh}\{(h-z)\sqrt{s+i}\}}{s\sqrt{s+i} \operatorname{ch}\{h\sqrt{s+i}\}}$$

作 Laplace 逆变化得到:

$$w(t, z) = -\tau \int_0^t e^{-it} \frac{\theta_1\left(\frac{h-z}{2h} \middle| \frac{i\pi t}{h^2}\right)}{h} dt \quad (2)$$

这里  $\theta_1$  为 Theta 函数, 考虑海表面性质, 可以得到水深为  $h$  的风生流表层解:

$$w(t, 0) = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(h^2 n^2)/t}\right) dt \quad (3)$$

对于无限深海情况, 形式上可令(3)式中  $h \rightarrow \infty$  得到, 即

$$w(t, \infty) = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-it}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{2} \tau \left[ C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} t\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} t\right) \right] \quad (4)$$

实际上, 上式可以从(1)式当  $h = \infty$  时直接求得。这里  $C(\cdot), S(\cdot)$  为 Fresnel 函数。

从(3), (4)式可以看到, 表层流的响应形式(而非有量纲量的大小)与风应力大小无关, 也与常垂直涡动系数大小无关。在无限深海情况下, 完全依赖于 Fresnel 函数的性质, 而在有限深海时与水深有关。这里从加速度来考察水深对响应过程的影响。对(3)式求时间的导数即可得加速度表达式:

$$\frac{\partial w(t, 0)}{\partial t} = \frac{\tau e^{-it}}{\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(h^2 n^2)/t}\right) \quad (5)$$

(5)式表示海水微团的惯性力。在式(5)中, 当  $t$  很大时总存在  $n'$ , 使  $\frac{h^2 n'^2}{t} \leq 0(1)(n < n')$ ,

即在含  $h$  的级数中相对 1 总有重要项, 因而当  $t$  较大时水深对非定常响应有重要影响。然

而, 如果  $t$  较小而使  $\frac{h^2}{t}$  为大量, 如记  $t' = \frac{h^2}{3}$  则当  $t < t'$  时, 含  $h$  的级数中各项相对 1

均是少量。也就是说, 当  $t < t'$  时(3)式可用(4)式近似。于是可以得到: 有限深海的非定常响应在开始时总是按照无限深海的响应形式来表现, 这种性质的持续时间可用

$$t' = \frac{h^2}{3}$$

来衡量。至于  $t > t'$  的性质随水深  $h$  有较大变化, 这正是下面要讨论的问题。

与 Fresnel 函数一样, 式(3), (4)含有的非定常过程是无穷振荡趋于定常值的。现在

用图来显示表层流对风应力的响应过程, 其中包括给出  $\left|\frac{w}{\tau}\right|$  随时间的变化和  $\frac{w}{\tau}$  在复平面上随时间  $t$  的轨迹(在各图中风应力是沿  $y$  方向的)。另外, 我们用下式来确定趋于定常状态所需的时间  $t_s$ :

$$\frac{|w(t, h) - w(\infty, h)|}{|w(\infty, h)|} = \delta \tag{6}$$

$\delta$  是一个小量, 如 0.03。在复平面上  $w(t, h)$  是以螺旋形趋向  $w(\infty, h)$  的, 所以(6)式给出的定义是合适的。

这里说明一点, 图 2、图 3 所表示的量  $\frac{w}{\tau}$  已被下式的模所归一化:

$$\frac{w(\infty, h)}{\tau} = \frac{\text{th}(h\sqrt{i})}{\sqrt{i}} \tag{7}$$

(7)式可通过求解定常 Ekman 问题得到。

图 2 表明在  $t = 2.3$  时, 速度大小达到最大值比风作用时刻滞后时间为  $2.3 d$ ; 而在顺风方向, 在  $1.57$  (即  $\frac{\pi}{2}$ )  $d$  达到最大值; 在垂直风方向上, 在  $3.14$  (即  $\pi$ )  $d$  时到最大值。从图 2 还可以看到, 表层流是以相当慢的速度趋向定常值, 当  $\delta = 0.03$  时  $t_s = 354$ , 因而无限深海定常解在真实情况下是很难实现的。实际上, 先验地假定垂直湍流系数为常值并非很合理。对于有限深海, 特别当水深可与 Ekman 摩擦深度相比拟时, 如果风的湍流混合相当均匀, 应该认为常垂直湍流系数假定是相当合理的。

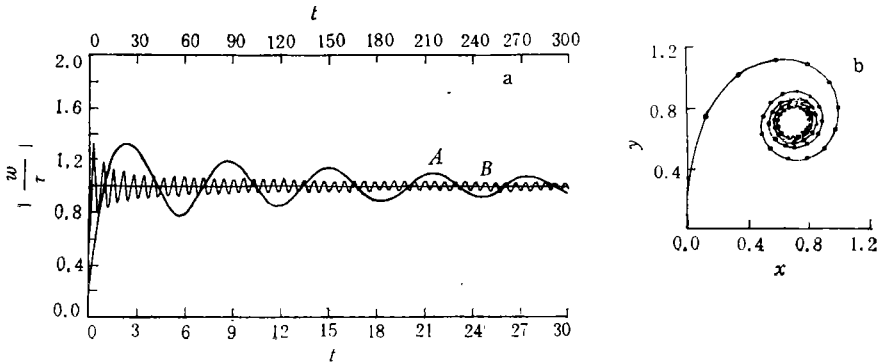


图 2 无限深 Ekman 模式

Fig. 2 The results of Ekman model for infinity depth

a.  $\frac{|w|}{\tau}$  随时间的变化, A 为下面坐标轴, B 为上面坐标轴; b. 速度矢端随时间的轨迹 ( $\Delta t = 0.5$ )。

图 3 给出了  $h = 1, 2, 3, 4, 5$  时的表层流响应过程, 可以看到, 在响应开始阶段, 其响应过程确实与图 2a 所示的相一致。还可以看到, 随着  $h$  值增大, 其总的响应过程(在  $t$  小于 30 的范围内)越来越象如图 2 所示的无限深海响应过程, 即当  $h > 5$  时, 可以用无限深海模式来表示其响应过程。这正如定常解(7)式所给出的, 当  $h > 5$  时无限深海的解是其相当好的近似。不过, 若以  $t_s$  来表征不同  $h$  下的响应过程, 其差别还是很大的。表 1 给出了不同  $h$  下的  $t_s$  和  $t_m$  值,  $t_m$  是响应过程中流速大小达到最大值时刻, 当  $h \geq 3$  时,  $t_m$  与无限深海性质一样。

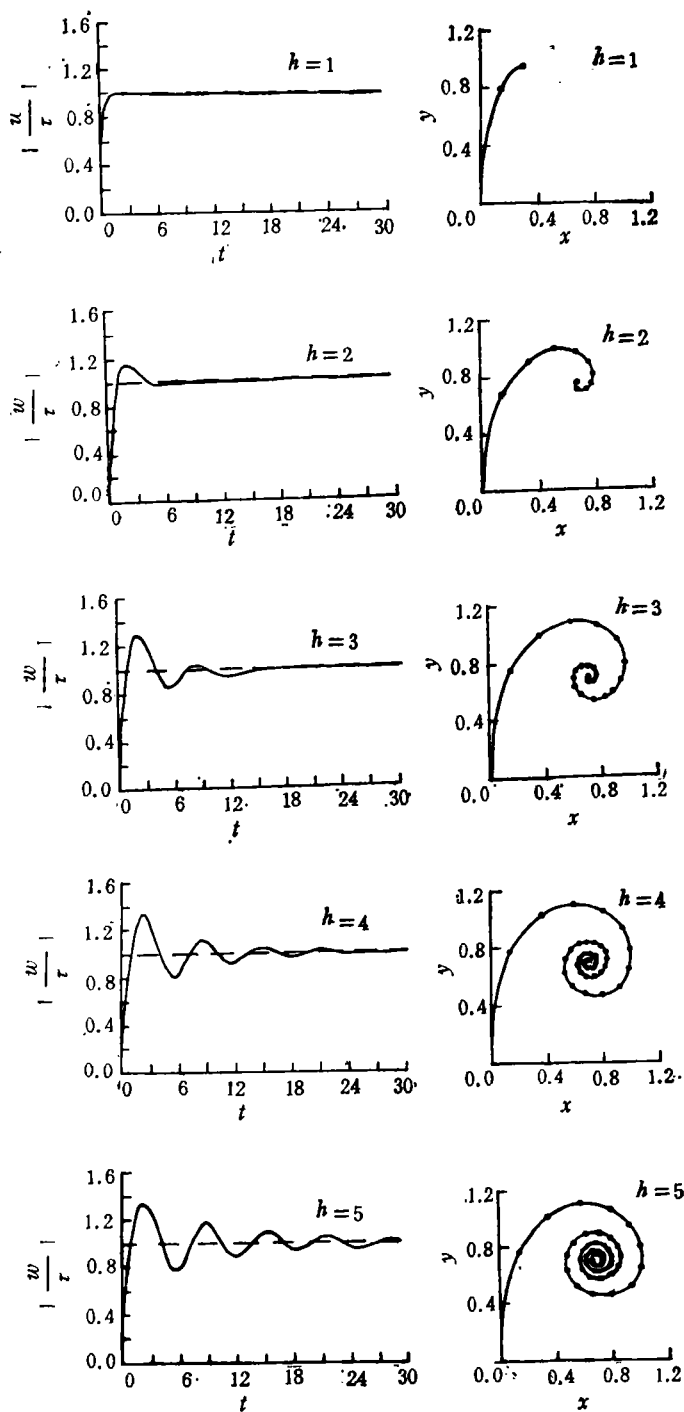


图3 不同  $h$  下  $\left| \frac{w}{\tau} \right|$  随时间变化及速度矢端随时间的轨迹 ( $\Delta t = 0.5$ )

Fig. 3 Temporal variance of  $\left| \frac{w}{\tau} \right|$  and hodograph ( $\Delta t = 0.5$ ) for different  $h$

表 1 不同  $h$  下趋于定常的时间 ( $t_s$ ) 和达到流速最大值的时刻 ( $t_m$ )Tab. 1 Time of tendency steady ( $t_s$ ) and reaching velocity maximum ( $t_m$ ) for different  $h$ 

$h$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\infty$
$t_s$	2.0	5.4	11.2	18.2	26.2	35.1	44.8	55.0	65.8	76.9	354
$t_m$	1.9	2.2	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3

## 2 变垂直湍流系数模式

仅考虑无限深海情况, 给出的深海变垂直湍流系数为(陈水明, 1993):

$$A_v = A_{v0} e^{\alpha z} \quad (8)$$

式中,  $A_{v0}$  是表层垂直湍流系数;  $z$  是被  $D = \sqrt{\frac{A_{v0}}{f}}$  无量纲化的向下为正的坐标;  $\alpha$  是一个与海面风速有关的无量纲量, 它的值可由下面经验式来估计:

$$\alpha = 3.42/(U_0)^{1/2} \quad (9)$$

式中,  $U_0$  是以 m/s 为单位的海面风速值, 即  $\alpha$  小是高海况, 而  $\alpha$  大是低海况。

基于式(8), (9), 得到了与实测数据比较(如风生流相对风应力的右偏角)相当合理的深海定常风生解。其定常表层流表达式为:

$$\frac{w}{\tau} = \frac{I_1\left(\frac{2\sqrt{i}}{\alpha}\right)}{\sqrt{i} I_0\left(\frac{2\sqrt{i}}{\alpha}\right)} \quad (10)$$

其中  $I_0, I_1$  为变形 Bessel 函数。引进(8)式后的无量纲非定常模式为:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + iw = \frac{\partial}{\partial z} e^{\alpha z} \frac{\partial w}{\partial z} \\ t = 0, w = 0; z = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = -\tau; z = \infty, w = 0 \end{cases} \quad (11)$$

对时间  $t$  作关于  $t = 0$  的奇开拓, 并引入在广义函数上的 Fourier 变换(英特希尔, 1965), 记  $\bar{w}(s, z) = F\{w(t, z)\}, \bar{\tau} = F\{\tau \text{sgn}(t)\}$  从(11)式可以得到:

$$\bar{w}(s, z) = \frac{\bar{\tau} e^{-(\alpha/2)z} I_1\left(\frac{2\sqrt{i(s+1)}}{\alpha}\right) e^{-(\alpha/2)z}}{\sqrt{i(s+1)} I_0\left(\frac{2\sqrt{i(s+1)}}{\alpha}\right)}$$

$z = 0$  即表层流解, 作 Fourier 逆变换:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \tau \text{sgn}(t) w_1(t-u) du = \tau \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\alpha}{\alpha^2 \zeta_m + 4i} (1 - e^{-i\tau - [(\alpha^2 \zeta_m)/4]t}) \quad (12)$$

$\zeta_m$  是零阶 Bessel  $J_0$  正零点平方,  $\zeta_2 = 30.47$  比  $\zeta_1 = 5.78$  要大得多, 所以(12)中非定常响应主要受  $e^{-i\tau - [(\alpha^2 \zeta_1)/4]t}$  控制。定义  $t'_1 = \frac{12}{\alpha^2 \zeta_1}$  利用(9)式有:

$$t'_1 \approx 0.178 U_0 \quad (13)$$

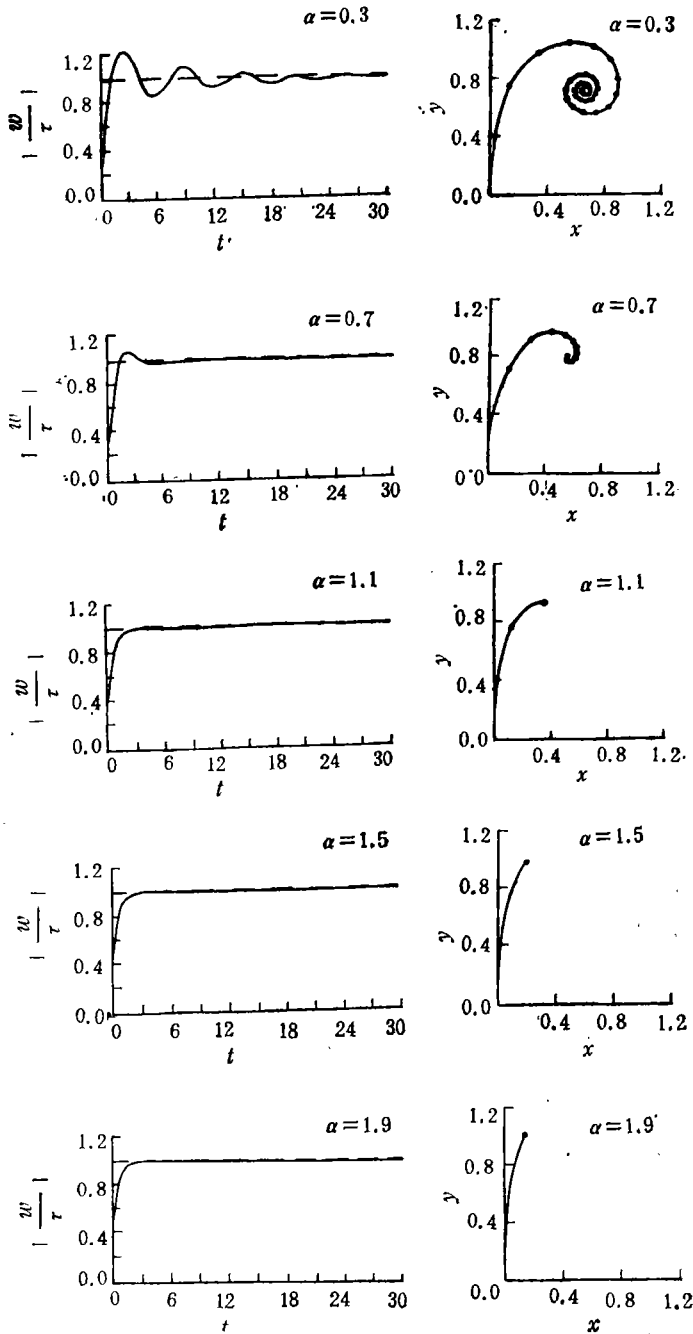


图 4 不同  $\alpha$  下  $\left| \frac{w}{r} \right|$  随时间变化及速度矢端随时间的轨迹 ( $\Delta t = 0.5$ )

Fig. 4 Temporal variance of  $\left| \frac{w}{r} \right|$  and hodograph ( $\Delta t = 0.5$ ) for different  $\alpha$

表 2 显示,对不同的  $\alpha, t'$  与  $t$ , 比较相差不大。所以可用 (13) 式来确定不同海况的趋

向定常时间。

图 4 给出了  $\alpha = 0.3, 0.7, 1.1, 1.5, 1.9$  时表层风生流对风应力的响应过程。注意该图中值已被式(10)的模所归一化。 $\alpha$  越小, 其响应过程越表现出 Ekman 模式在无限深海下的性质, 这与在陈水明(1993)中得到的结论是一致的, 实际上变垂直湍流系数模式在  $\alpha \rightarrow 0$  就是 Ekman 模式情形, 当  $\alpha$  较大时, 速度几乎无振荡地趋向定常值。

表 2  $\alpha$  取不同值时趋于定常的时间 ( $t_s$ )、流速最大时刻 ( $t_m$ ) 及(13)式定义的  $t_s'$

Tab. 2 Referring to Different  $\alpha$ , Time for tendency steady ( $t_s$ ) and reaching velocity maximum ( $t_m$ ), and  $t_s'$  defined by (13)

$\alpha$	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.0
$t_s$	19.0	7.4	4.6	2.5	1.7	1.3	0.97	0.76	0.61	0.55
$t_m$	2.2	2.2	2.1	2.0						
$t_s'$	23.1	8.3	4.2	2.6	1.7	1.2	0.92	0.72	0.57	0.52

表 2 列出了不同  $\alpha$ , 也就是不同海况下的趋向定常时间  $t_s$ , 此时  $\delta$  仍取 0.03。 $t_m$  行有些没有值, 是因为在那些  $\alpha$  取值下在  $t_s$  前无振荡。从表中可以看到,  $t_s$  的变化范围相当大, 如当  $\alpha$  从 0.5 变到 1.7 时,  $t_s$  从 7.4 变到 0.76。而从赵保仁 (1982) 的统计结果看, 单个观测点的流场相对风场的滞后时间分布相当广泛(该文图 4), 本研究与其基本一致。

比较表 1 表 2 中  $t_s$  值, 看出, 仅当  $\alpha$  较小时, 表 2 的  $t_s$  值才与表 1 中值相一致, 也就是说, 对于高海况, 本节的模式与 Ekman 模式相一致。而对于中及低海况, 两者差别很大。Blackford (1986) 列举了几个实测个例, 它们分别是几个小时(冰山)、3 个惯性周期(浅海)、10 天左右(密集冰), 所以跟实测比较, Ekman 模式似乎显得太大了, 如  $h = 4$  时  $t_s = 18.2$ ,  $h = 5$  时  $t_s = 26.2$ 。另外, 在 Ekman 模式中, 对于所有  $h > 1$ , 都有  $t_s > 2$ , 这也似乎有点不合实际。所以我们认为, 为考察 Ekman 模式的适应性, 除了考虑水深因素, 还需要考虑海面风应力情况。在水较浅而海况强烈时, Ekman 模式是一种较好的模式, 而在其它情况就应考虑采用变垂直湍流系数模式。

对于有限深海情况, 特别在中、低海况下, 还需比 Ekman 模式更合理的模式。不过正如第一节所揭示的, 相信无限深海的解在某个有限的时间内是可以被应用的。

### 3 结语

本文解析地给出了两种模式下的结果, 通过比较, 认为常垂直湍流系数模式讨论风生流响应问题是过于理想化了, 对垂直湍流系数引入新的表达式是完全必要的。

本文实际上仅给出了海面对定常风的非定常响应, 要将这个结论应用到实际中去就显得过于简单了。尽管解很容易推广到非定常风情况, 然而若考虑非定常风, 首先一个问题是, 对怎样的非定常风来讨论才具有实际意义? 在这方面未作进一步探讨。虽然如此, 对理解海洋的非定常响应还是具有一定帮助的。除此之外, 可以将结果用来理解海面停风后风生流的消衰过程。设海面从  $t = 0$  受风应力  $\tau$  作用, 如在  $t = t_0$  停风, 在线性模式下, 其解  $w_0(t)$  可用一直受风应力  $\tau$  作用的解  $w(t)$  来表示, 即为  $w_0(t) = w(t) - w(t - t_0)$ 。 ( $t \geq t_0$ ) 记  $w(\infty)$  为一直受风应力  $\tau$  的定常解, 显然有:

$$\left| \frac{w_0(t)}{w(\infty)} \right| \leq \frac{|w(t) - w(\infty)|}{|w(\infty)|} + \frac{|w(t - t_0) - w(\infty)|}{|w(\infty)|}$$

只要  $t - t_0 \geq t_s$ , 即停风时间达到  $t_s$ , 利用(6)的定义得到:

$$\left| \frac{w_0(t)}{w(\infty)} \right| \leq 2\delta \quad (t - t_0 \geq t_s)$$

即  $t_s$  可以作为海面风生流基本消衰的一个时间尺度。

### 参 考 文 献

- 陈水明, 1993, 一个深海定常风生流模式, 海洋与湖沼, 24(4): 377—384。  
 赵保仁, 1982, 局地风对黄海和东海近岸浅海海流影响的研究, 海洋与湖沼, 13(6): 479—490。  
 路季平, 1984, 积分变换及其在物理海洋中的应用, 第四章, 海洋出版社(北京), 258。  
 英特希尔, 王建华译, 1965, 富里叶分析与广义函数引论, 科学出版社(北京), 81。  
 Blackford, B. L., 1986, Wind stress damping of frictionless inertial motion, *Atmosphere-Ocean*, 24(2): 189—195。

## THE TEMPORAL RESPONSE OF CALM SEA TO SURFACE WIND STRESS

Chen Shuiming

(First Institute of Oceanography, SOA, Qingdao 266003)

### ABSTRACT

An explanation is given for the temporal response process of the open, calm sea surface wind stress. The controlled equation used includes local inertia, Coriolis force, and vertical turbulent terms.

When the vertical turbulent coefficient is constant, the model is called Ekman model. We place emphasis on its mode of response, and find out that its mode of response is not related to the magnitude of sea surface wind stress and value of the turbulent coefficient. When the water depth is finite, if  $t < \frac{h^2}{3}$  ( $t, h$  are nondimensional time and water depth), the features for finite water depth are very similar to those for infinite water depth. In this article, we also dealt with the case for the varied vertical turbulent coefficient and the infinite depth. In this case the nondimensional response time can be scaled empirically by the sea surface wind speed. After comparing with the observational data, we conclude that the varied vertical turbulent coefficient model is more reasonable than the Ekman model.

Although the variation of the wind field is neglected, our results are helpful for understanding the temporal response process of the sea to the surface wind stress.



ss. Otherwise, our results can be applied to the decay process when the surface wind disappears.

**Key words** Temporal response Ekman model Vertical turbulent coefficient

### 《地球化学》1994 年增刊征订启事

《地球化学》是中国科学院广州地质新技术研究所(原中国科学院地球化学研究所广州分部)和中国矿物岩石地球化学学会主办的学报类综合性学术刊物。主要报道有关地球化学、同位素地球化学、同位素地质年代学、矿床地球化学、有机地球化学、元素地球化学、环境地球化学、宇宙地球化学、海洋地球化学、实验地球化学、第四纪地球化学及岩矿测试等方面的创造性、综合性科研成果和研究简报、书刊简介、会议报道、问题讨论等。

鉴于《地球化学》为季刊,每期 96 页,容稿量有限,而稿源十分丰富,为减少积存稿件,缩短发表周期,现经国家科委批准(国科通[1994]7 号文)于 1994 年出版增刊一期,预计 30 万字,定价 15.00 元/册。望欲订购者见本启事后速与本刊编辑部或科学出版社代办处联系。

《地球化学》编辑部联系地址: 广州市五山 1131 信箱《地球化学》编辑部

邮政编码: 510640 电话: (020)5519755—2033 电报挂号: 0936 传真: (020)5514130

科学出版社代办处联系地址: 北京东城区东黄城根北街16号 科学出版社期刊室

联系人: 尹瑞爱 邮政编码: 100717 电话: (01)4019819

《地球化学》编辑部 1994.3