第27卷 第3期 海洋与湖沼 Vol.27, No.3
1996年 5月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA May, 1996

海浪波面的信息熵与海浪的谱宽度参量*

吴克俭 孙孚
（青岛海洋大学物理海洋研究所，青岛 266003） （青岛海洋大学物理海洋实验室，青岛 266003）

提要 将信息熵(Information Entropy)引入到海浪波面的研究。通过谱的参量化，建立了谱宽度参量 P, R, ε^2, ν^2 与它们对应的信息熵之间的关系；这些谱宽度参量，皆可引入到波面与波高的分布函数之中，并指出谱宽度参量具有熵的含义。给出了海浪波面熵的一种合理表示。

关键词 熵 信息熵 谱宽度参量

海浪是由大气引起的海水运动，大气运动的随机性必然决定了海浪的瞬息万变、杂乱无章，具有明显的不确定性。自然地，对于海浪不确定性的研究，熵是最有力的工具。近十几年来，人们积极地寻求其在海浪研究中的引入、扩展和应用，虽然已有人将Burg (1967) 提出的最大熵谱估计用于估计海浪谱，West (1981) 企图引入熵概念来研究水波，但迄今将熵概念引入海浪研究的报道仍不多见。熵与海浪研究相结合，无论对于探索海浪本身的复杂性还是对大气的研究无疑具有重要的意义。但如何在海浪场中合适地引入熵概念并使之便于应用是首先要考虑和探讨的问题。本文通过对谱的参量化研究，在线性海浪理论的范围内引入了熵的概念，建立了熵与各种谱宽度参量之间的联系，从而给各种谱宽度参量赋予了熵的含义。考虑到各种谱宽度参量可引入到波面与波高的分布函数之中，熵亦可引入到波面与波高的分布函数之中。

1 海浪场的信息熵

信息熵(以下简称熵)是Shannon于1948年研究信息论时定义的一个重要概念(李天岩，1990)，若随机变量 ζ 在 $\zeta=x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 时，取概率 p_i $(i=1, 2, \cdots, n)$，则熵 I 定义为：

$$I=-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln p_i \tag{1}$$

I 度量了随机变量 ζ 的混乱程度(或不确定性程度)，I 愈大，其混乱程度愈大；反之则愈小，若 ζ 为确定性量，则熵 $I=0$。自然地，若 ζ 为连续性随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则其信息熵 I 定义为：

$$I=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ln f(x)dx \tag{2}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目，49276248号。吴克俭，男，出生于1966年7月，硕士，讲师。
收稿日期：1994年11月3日，接受日期：1995年6月10日。

特别地，若ζ服从正态分布：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$，其中$E\zeta=a$，$D\zeta=\sigma^2$，则$I=\ln(\sqrt{2\pi e}\ \sigma)$。

假定海浪波面$\zeta(t)$服从Longuet-Higgins线性模型：$\zeta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\omega_n t+\varepsilon_n)$

ε_n于[0、2π;内均匀分布，振幅a_n与频谱$S(\omega)$以如下形式约束：$\sum_{\omega}^{\omega+\delta\omega}\frac{1}{2}a_n^2=S(\omega)\delta\omega$

则：

$$E\zeta=0,\ D\zeta=\sigma^2=\int_0^{\infty}S(\omega)d\omega$$

由中央极限定理，$\zeta(t)$的分布密度为：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (3)

则：

$$I=\ln(\sqrt{2\pi e}\ \sigma) \tag{4}$$

通过上面论述可以知道，(4)式实际上仅仅是将波面ζ看作为一随机变量时其混乱度的表示，方差在其中扮演了重要角色，熵I只与波面方差有关。

必须指出，单纯简单地用(4)式来表示海浪波面随机过程的熵是不适宜的。首先，由(4)式必然得出两类具有相同方差不同内部结构的随机过程却具有相同“混乱度”的错误结论。已知，随机过程的能量谱给出了该过程在波数空间或频率域内的分布，从而决定了该过程的内部结构，也就确定了外观表现，从这个意义上说，谱必定以某种方式、在某种程度上表述了过程的混乱度。(4)式用方差去判断随机过程的混乱程度，其实质是由谱函数所围的体积或面积大小去反映混乱程度而未考虑谱形对混乱度的影响。其次，由(4)式显然混乱度与方差的因次有关，这不仅可能出现易于引起争议的“负熵”问题，而且不利于不同资料之间的互相比较，这无论对于理论研究还是具体应用都带来了很大麻烦。

基于上述考虑，我们认为，随机变量的熵与随机过程的熵(尽管数学上还没有确切的定义，甚至对简单的平稳过程亦没有，但并不妨碍我们如此提法)是两个截然不同的概念，用随机变量的熵去代替随机过程的熵必然掩盖随机过程的内部结构而得出错误结论。对于海浪波面随机过程来说，必须引入能刻画其内部结构的量来表示混乱程度。所以，本文引入能刻画谱形细致结构的谱宽度参量，分析表明，这种思路是正确的。

2　谱的参量化与谱宽度参量在分布函数中的引入

目前，海浪谱研究中广泛使用的谱宽度参量有如下几种

$$\begin{cases} P=\dfrac{S(\omega_0)\omega_0}{m_0} \\ R=\dfrac{\overline{\omega}}{\omega_0} \\ \varepsilon^2=1-\dfrac{m_2^2}{m_0m_4} \\ \nu^2=\dfrac{m_0m_2}{m_1^2}-1 \end{cases} \tag{5}$$

其中 $m_r=\int_0^{\infty}\omega^r S(\omega)d\omega$; $r=0, 1, 2, 4$，为谱的 r 阶矩；ω_0 为谱峰频率；$S(\omega_0)$ 为峰频率对应的谱值；$\overline{\omega}=\left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}}$；另外，我们记 $\langle\omega\rangle=\frac{m_1}{m_0}$，$\omega^*=\left(\frac{m_4}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}}$。

Wen 等(1988a)曾引入 P 来刻画风浪频谱的能量集中程度，侯一筠(1990)亦曾提出谱宽度参量 $B=1/P$，我们此处以 P 展开讨论。对于较大的 P 值，能量分布较窄；反之，能量分布较宽，故 P 为描述风浪成长状态的一个参量，P 被叫做尖度因子，其取值范围约为 1.444— 5，$P=1.444$ 对应着风浪的充分成长状态。Wen 等(1988a)还曾引入 R 来刻画风浪的不同成长状态，小的 R 值代表年轻的风浪，大的 R 值代表成熟一些的风浪，R 的取值范围约为 1.1— 1.7。ε 为 Cartright 等(1956)讨论随机函数极大值分布过程中出现的一个量，理论上 ε 可具如下范围之值：$0<\varepsilon<1$，ε 较小时，能量集中，相应于窄谱；反之，当 ε 较大时，能量分散，相应于宽谱。v 为 Longuet-Higgins (1957) 提出的一个表征谱宽度的参量，v 值较小时对应于窄谱；反之，则对应于宽谱。上述 4 种谱宽度参量以 P 的计算最为简便，故近年来在海浪谱的研究中 P 已引起人们的重视。

侯一筠(1990)提出，采用如下参量化谱：

$$\begin{cases}\widetilde{S}(\widetilde{\omega})=\dfrac{S(\omega)}{S(\omega_0)}\\[2ex]\widetilde{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega_0}\end{cases}\tag{6}$$

P 可有效地引入波面与波高的分布密度函数之中：

$$f(\widetilde{\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi/P}}e^{-\frac{\widetilde{\xi}^2}{2/P}}\tag{7}$$

$$f(\widetilde{H})=\frac{\widetilde{H}}{4/P}e^{-\frac{\widetilde{H}^2}{8/P}}\tag{8}$$

其中无因次化波面 $\widetilde{\xi}=\dfrac{\xi(t)}{\sqrt{S(\omega_0)\omega_0}}$，无因次化波高 $\widetilde{H}=\dfrac{H}{\sqrt{S(\omega_0)\omega_0}}$。

我们经过研究发现，对谱以适当的形式无因次化，谱宽度参量 R, ε^2, v^2 皆可有效地引入到波面与波高的分布函数当中。首先，对 $S(\omega)$ 以如下形式无因次化：

$$\begin{cases}\widetilde{S}(\widetilde{\omega})=\dfrac{S(\omega)\overline{\omega}}{m_0}\\[2ex]\widetilde{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega_0}\end{cases}\tag{9}$$

可得：
$$\widetilde{m}_0=\int_0^{\infty}\widetilde{S}(\widetilde{\omega})d\widetilde{\omega}=\int_0^{\infty}\frac{S(\omega)\overline{\omega}d\omega}{m_0\omega_0}=R\tag{10}$$

相关函数 $R(\tau)$ 与 $S(\omega)$ 有如下一一对应的关系：

$$R(\tau)=\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)}=\int_0^\infty S(\omega)\cos\omega\tau d\omega \tag{11}$$

引入无因次量 $\tilde{t}=t\omega_0$，$\tilde{\tau}=\tau\omega_0$，用 m_0/R 去除上式两端:

$$\frac{R(\tau)}{m_0/R}=\int_0^\infty \frac{S(\omega)}{m_0/R}\cos\tilde{\tau}\tilde{\omega}d\omega=\int_0^\infty \tilde{S}(\tilde{\omega})\cos\tilde{\tau}\tilde{\omega}d\tilde{\omega}=\tilde{R}(\tilde{\tau}) \tag{12}$$

因此，无因次波面应定义为 $\tilde{\xi}(\tilde{t})=\dfrac{\xi(t)}{\sqrt{m_0/R}}$，无因次方差应为 $\overline{\tilde{\xi}^2(\tilde{t})}=\tilde{R}(0)=R$，波面与波高的分布密度函数为:

$$f(\tilde{\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}e^{-\frac{\xi^2}{2R}} \tag{13}$$

$$f(\tilde{H})=\frac{\tilde{H}}{4R}e^{-\frac{\tilde{H}^2}{8R}} \tag{14}$$

对 $S(\omega)$ 以如下形式无因次化:

$$\begin{cases}\tilde{S}(\tilde{\omega})=\dfrac{S(\omega)\overline{\omega}}{m_0}\\ \tilde{\omega}=\dfrac{\omega}{\langle\omega\rangle}\end{cases} \tag{15}$$

可知:

$$\tilde{m}_0=\int_0^\infty \tilde{S}(\tilde{\omega})d\tilde{\omega}=(1+v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

采用上面讨论 R 的方法可知无因次波面的定义应为 $\tilde{\xi}(\tilde{t})=\dfrac{\xi(t)}{\sqrt{m_0/(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}}$，无因次波面的方差定义应为 $\overline{\tilde{\xi}^2(\tilde{t})}=\tilde{R}(0)=(1+v^2)^{\frac{1}{2}}$，$\tilde{\zeta}$，$\tilde{H}$ 的分布密度函数为:

$$f(\tilde{\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}}e^{-\frac{\xi^2}{2(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{17}$$

$$f(\tilde{H})=\frac{\tilde{H}}{4(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\tilde{H}^2}{8(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{18}$$

采用如下形式的无因次化谱:

$$\begin{cases}\tilde{S}(\tilde{\omega})=\dfrac{S(\omega)\omega^*}{m_0}\\ \tilde{\omega}=\dfrac{\omega}{\overline{\omega}}\end{cases} \tag{19}$$

$$\tilde{m}_0=\int_0^\infty \tilde{S}(\tilde{\omega})d\tilde{\omega}=\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{20}$$

采用讨论 R 时的方法知 $\tilde{\xi}(\tilde{t})=\dfrac{\xi(t)}{\sqrt{m_0(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}}$，方差 $\overline{\tilde{\xi}^2(\tilde{t})}=\tilde{R}(0)=\dfrac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$，$\xi$，$\tilde{H}$ 的分布密度函数为：

$$f(\tilde{\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi/(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}}e^{-\frac{\tilde{\xi}^2}{2/(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{21}$$

$$f(\tilde{H})=\frac{\tilde{H}}{4/(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\tilde{H}^2}{8/(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}} \tag{22}$$

3 波面熵与谱宽度参量之间的关系

由式(7)，(13)，(17)及(21)知，对应于不同无因次化波面的熵 I_P，I_R，I_{ε^2}，I_{v^2} 为：

$$I_P=\ln(\sqrt{2\pi e/P}) \tag{23}$$

$$I_R=\ln(\sqrt{2\pi eR}) \tag{24}$$

$$I_{\varepsilon^2}=\ln\left(\sqrt{2\pi e/(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{25}$$

$$I_{v^2}=\ln\left(\sqrt{2\pi e(1+v^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{26}$$

这样，我们得到不同谱宽度参量与其所对应熵的关系，(23)—(26)式表明谱宽度参量 P，R，ε^2，v^2 皆具有熵的含义，不难看出，I_P，I_R，I_{ε^2}，I_{v^2} 皆可引入相应的无因次化波面与波高的分布之中。

就实际资料测量的谱宽度参量 P，R，ε^2，v^2 的数值范围来看，计算出的熵值 I_P，I_R，I_{ε^2}，I_{v^2} 皆为正值，不仅避免了易于引起争议的“负熵”问题，而且利于不同资料之间的互相比较，故无论对于理论研究还是具体应用都是方便的。

由于尖度因子 P 能描述谱形细致结构和风浪的成长状态，所以，用 I_P 来表示海浪波面随机过程的熵是合理的。P 中包含三个量 $S(\omega_0)$，ω_0，m_0，给出了这三个量，实际上给出了 P，ω_0，m_0，以此三个量为参量的风浪频谱人们已作了大量研究(Wen et al., 1988a，1989b，1994)，它们能大体上近似描述谱函数的结构，从而熵 I_P 亦反映了细致结构和风浪的成长状态。

无论从各种谱宽度参量的计算还是从谱的无因次化手续来看，由尖度因子 P 来计算 I_P 是最简的。P 涉及到谱的零阶矩的计算，而 R，ε^2，v^2 皆涉及到高阶矩的计算，而且对某些形式的谱四阶矩不存在，故 ε 的应用受到限制。从目前的结论来看，P 的适用性较 R，ε^2，v^2 为强，故建议在具体理论与应用研究中用 I_P 来刻画和描述海浪波面的熵。

4 讨论与结论

4.1 不但谱尖度因子 P 可引入到海浪波面与波高的分布函数中，描述谱宽度的其它参量 R，ε^2，v^2 亦可引入到海浪波面与波高的分布函数中。

4.2 上述谱宽度参量皆具有熵的含义，它们都在不同的意义下描述了海浪波面的混乱程度。

4.3 熵 I_P，I_R，I_{ε^2}，I_{v^2} 皆可引入到海浪波面和波高的分布函数当中。

4.4 建立熵 I 与风区及风时的关系是重要的，这首先要涉及矩 m_r $(r=0, 1, 2, 4)$ 与风区及风时的关系，若 m_r 与风区及风时的关系确定，则 I_P, I_R, I_{ε^2}, I_{ν^2} 与风场及风时的关系也随之确定。Wen 等(1989a)曾给出了定常风速深水情况下 P 与风区及风时的关系：

$$P=17.6\tilde{x}^{-0.233}, \quad \tilde{x}=0.012\tilde{t}^{1.3}$$

其中 $\tilde{x}=gx/U^2$, $\tilde{t}=gt/U$ 分别为无因次风区及无因次风时(x, t 分别为有因次风区及风时，U 为海面上 10m 高度处的风速)，则 I_P 与风区及风时的关系可简单地获得，通过这种关系可简单说明波面随时间随风区变化是否越来越混乱等问题。

4.5 就单纯的风浪和涌浪来说，通常风浪的谱尖度因子 P 小于涌浪的谱尖度因子 P，因而风浪的熵 I_P 大于涌浪的熵 I_P，这通常与人们视觉意义下的风浪比涌浪混乱是相符的。

4.6 由于熵不满足变换不变性，故 I_P, I_R, I_{ε^2}, I_{ν^2} 之间一般不宜做比较，通常只对同一无因次化手续下两种不同的熵值如 I_{P_1}, I_{P_2} 之间做比较。如何将测度方法不同的熵联系起来是一个有趣的问题。最近，Wen 等(1994)通过大量实验室及外海资料拟合，给出了 P 与 R 的关系：$R^2=1+4.14\exp(-0.809P^{0.776})$，则 I_P 与 I_R 的关系也容易获得。

参 考 文 献

李天岩，1990，数学进展，**19**(3)：301—320。

侯一筠，1990，海洋与湖沼，**21**(5)：425—432。

Burg, J. P., 1967, Proceeding of the 37th, Meeting of the Society of Exploration Geophysists, Oklahoma City, U. S., pp.12—208.

Cartright, D. E. et al., 1956, *Proc. Roy. Soc.*, **237**(1209): 212—232.

Jaynes, E. T., 1957, *Phys. Rev.*, **106**(4): 620—630.

Longuet-Higgins, M. S., 1957, *Phil. Tran. Roy. Soc.*, **A249**(966): 321—387.

Wen, S. C. et al., 1988a, *Acta Ocean. Sin.*, **7**(1): 1—16.

Wen. S. C. et al., 1989a, *Acta Ocean. Sin.*, **8**(1): 15—39.

Wen, S. C. et al., 1989b, *Acta Ocean. Sin.*, **8**(4): 467—483.

Wen, S. C. et al., 1994, *Progress in Natural Science*, **4**(4): 407—427.

West B. J., 1981, Deep Water Gravity Waves, Springer-Verlag (New York), pp.249—287.

INFORMATION ENTROPY OF WAVE SURFACE DISPLACEMENT AND PARAMETERS OF SPECTRUM WIDTH

Wu Kejian
(*Institute of Physical Oceanogoraphy, Ocean University of Qingdao, Qingdao* 266003)
Sun Fu
(*Laboratory of Physical Oceanogoraphy, Ocean University of Qingdao, Qingdao* 266003)

Abstract Information entropy is introduced into studies of wave surface displacement. Through parameterized frequency spectra, the ralationships between parameters P, R, ε^2, ν^2 of spectrum width and the corresponding information entropy are established. The results showed that entropy can be introduced into the probability distributions of surface displacement and wave height, and parameters of spectrum width have entropy meanings. Considering the fact that spectrum width parameter characterizes the waves states, the corresponding entropy also describes different stage of waves.

Key words Entropy Information entropy Spectrum width parameter