

相空间反演方法在表层水温预报中的应用*

魏恩泊 田纪伟 李凤歧 苏育嵩

(青岛海洋大学海洋系, 青岛 266003)

摘要 利用相空间理论及方法对渤、黄、东海共 4 个站位近十几年的旬平均 SST 进行分析。结果表明: 表层水温具有混沌特性, 其吸引子关联维数平均约为 1.23, 嵌入相空间维数为 6(渤、黄海)和 7(东海 178 号站位), 二阶 Renyi 熵平均约为 $3.7 \times 10^{-4} (1/d)$ 及平均可预报时间尺度平均为 27 个点; 基于以上分析结果运用相空间反演方法建立了旬平均 SST 的反演模型, 并且在试预报的前 5 旬的最大相对误差约为 4.2%。

关键词 关联维数 嵌入维数 Lyapunov 指数 二阶 Renyi 熵

通常采用传统的统计预报方法时, 由于人们对许多环境因素缺乏深入的了解, 加之测量广度和精度的限制, 往往将预报的不准确归咎于系统的外在随机因素。然而, 混沌理论指出, 即使某些完全确定的系统, 不附加任何随机因素亦可表现出内在随机性, 从而导致长期行为的不可预报性。近年来, 相空间理论的发展为研究非线性预报问题提供了新的途径, 已提出了根据时间序列重新构造动力系统的思想和估计系统动力学特性的方法(Grassberger et al., 1983; Wolf et al., 1985), 从而使人们有可能根据观测的物理量随时间的变化来重新恢复动力系统并进行预报。

本文运用相空间理论对单时间的渤、黄、东海十几年的旬平均 SST 资料的混沌特性进行分析, 基于分析结果利用相空间反演方法对该资料建模及后报。

1 相空间反演方法

在实际问题中往往面对形如(1)的单一时间序列构成的系统:

$$x(t_0), x(t_0 + \Delta t), \dots, x(t_0 + (n-1)\Delta t) \quad (1)$$

其中, t_0 为观测起始时间; Δt 为时间间隔; n 为样本容量。(1)式包含了原有系统变量的相互作用, 可以引入一个延迟时间尺度 τ 重新构造一个 m 维的相空间:

$$X(t) = \{x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)\} \quad (2)$$

其中, τ 为 Δt 的正整数倍, m 为嵌入维数。可证得当 m 充分大时重建的系统(2)与原动力系统的几何性质是等价的。 m 的选取由关联维数 D_2 (Grassberger et al., 1983) 计算:

$$D_2 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_m(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (3)$$

其中,

$$C_m(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N \theta(\|x_i - x_j\| - \varepsilon) \quad (4)$$

* 国家自然科学基金资助项目, 49476254 号; 国家“八五”攻关项目, 85-903-08-01 号。魏恩泊, 男, 出生于 1965 年 1 月, 硕士, 讲师。

收稿日期: 1995 年 10 月 13 日, 接受日期: 1996 年 4 月 1 日。

$$\theta(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha \geq 0 \\ 1 & \alpha < 0 \end{cases}$$

使 m 由小到大直到双对数图上斜率 D_2 达到饱和为止, 此时与 D_2 饱和值相对应的最小 m 值即为嵌入维数。当 m 充分大时, D_2 不收敛表明了所研究的时间序列是一个随机系统, 而嵌入维数 m 不存在; 反之, 该系统是有限维的, D_2 为系统的自由度数目下限, m 为其上限。

根据熵的理论, 熵表达了系统信息流率, 如果系统的信息越多就难以对它的目标进行预测。在实际计算中通常使用二阶 Renyi 熵 k_2 (Grassberger et al., 1984)。

$$k_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p\tau} \ln \frac{C_m(\varepsilon)}{C_{m+p}(\varepsilon)} \quad (5)$$

其中, τ 和 ε 分别表示吸引子微元的时间尺度和空间尺度, p 为正整数。可以证明 (陈式刚, 1992; Grassberger et al., 1983; 1984) $k_2 \leq \sum \lambda_i$ (λ_i 为正的 Lyapunov 指数)。因此, 本文只计算平均可预报的时间尺度 $T_a = \frac{1}{k_2}$ 。

假设对某系统形如 (1) 的时间序列确定了嵌入相空间维数 m 及自相关时间尺度 τ 后, 可重构 m 维相空间 (2), 建立反演方程:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

若 f_i 是解析函数, 可选用 K 阶多项式逼近, 则 (6) 的差分形式为:

$$\frac{y_i^{(j+1)\Delta t} - y_i^{(j-1)\Delta t}}{2\Delta t} = f_i(y_1^{j\Delta t}, y_2^{j\Delta t}, \dots, y_m^{j\Delta t}) \quad (7)$$

其中, $y_i^{j\Delta t} = x(j\Delta t + (i-1)\tau)$; $f_i = \sum_{k=1}^K S_k R_k$, S_k 为 k 阶多项式, R_k 为待定系数。对 R_k 而言 (7) 为一个线性方程可用反演方法求得 (丑纪范, 1986)。

2 应用

2.1 资料 本文利用渤海 8 号站、黄海 114 号站、43 号站、东海 178 号站十几年的连续旬平均表层水温资料进行分析及预报, 样本容量 (旬) 分别为: 8 号站, 519; 43 号站, 368; 114 号站, 448; 178 号站, 540; 其样本长期分别为 14 年, 10 年, 12 年, 15 年。

2.2 应用结果 首先, 利用 (8) 式:

$$f(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} [x(t_i) - \bar{x}] \cdot [x(t_i + \tau) - \bar{x}]}{\sum_{i=1}^n [x(t_i) - \bar{x}]^2} \quad (8)$$

确定资料的自相关时间尺度 τ , 其中, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 。

当 $f(\tau) = 0$ 时的第一个 τ 作为延迟时间尺度, 这里计算后各站位 $\tau = 9\Delta t$ 。然后用 (3), (4), (5) 分别对各站计算 D_2 , m , k_2 (有关计算 D_2 , m , k_2 所需资料长度可参见:

Nerenberg et al., 1990), 其结果见表 1, k_2-m 见图 1。

表 1 各站位的嵌入维数 m 值、关联维数 D_2 及二阶 Renyi 熵 k_2 值

Tab.1 The embedding dimensions m , Correlation dimensions D_2 and two order Renyi entropies k_2 of stations, Bohai Sea(8), Yellow Sea(43, 114), East China Sea(178)

| 站位 | 8 | 43 | 114 | 178 |
|------------------------|------|------|------|------|
| m | 6 | 6 | 6 | 7 |
| D_2 | 1.12 | 1.22 | 1.22 | 1.37 |
| $k_2(1/d) \times 10^4$ | 3.17 | 3.90 | 3.88 | 4.24 |

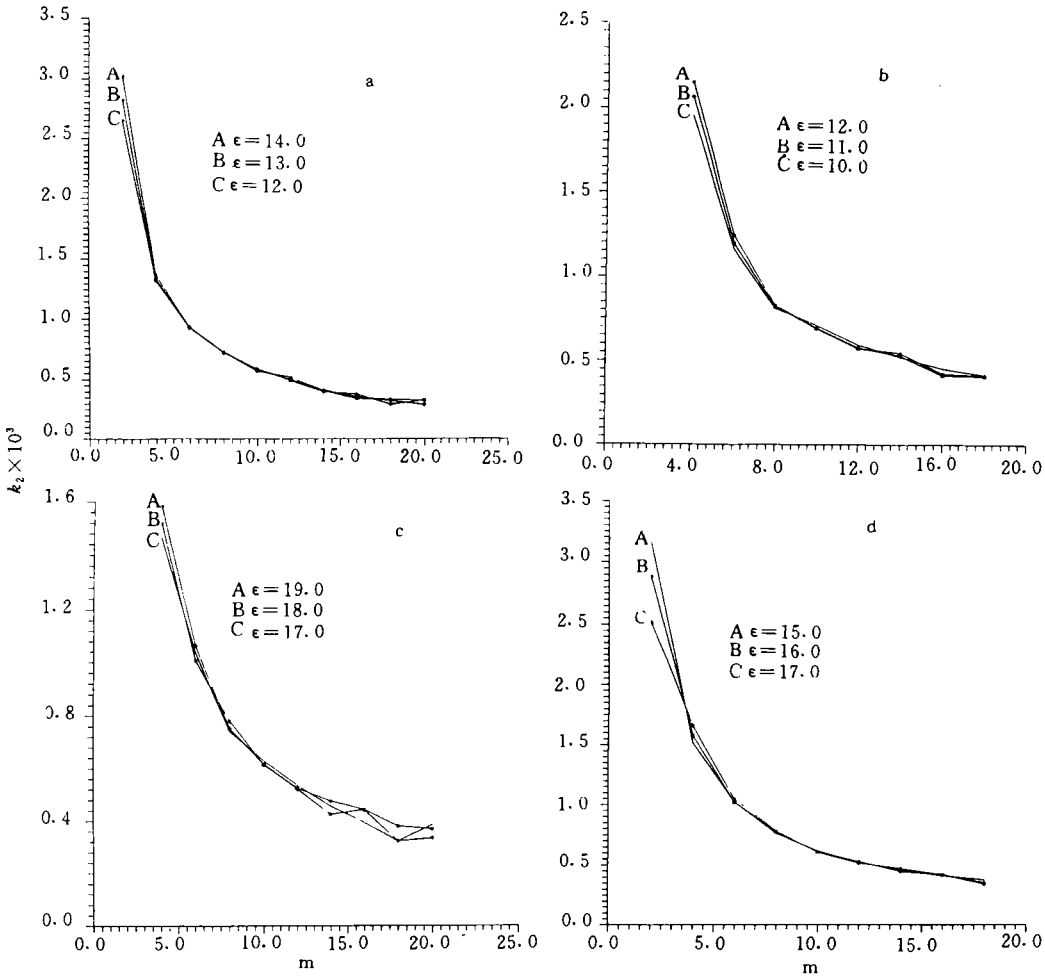


图 1 各站位的 k_2-m 图

Fig.1 The relations between k_2 and m of stations, Bohai Sea(8), Yellow Sea(43, 114), East China Sea(178)

a. 8号站; b. 178号站; c. 114号站; d. 43号站。

最后, 由 τ, m 重构相空间得动力系统: $\frac{dX}{dt} = A + BX + X^T CX$

其中, $X = \{x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)\}^T$; A, B, C 待定矩阵可由(7)用反演方法求得。其各站的后报误差见表 2。可预测点数约为 $\frac{T_a}{\tau}$, 即 8 号站为 34 个点, 43 号站和 114 号站均为 28 个点, 178 号站为 21 个点。由混沌系统的局域特征(李志锦等, 1995), 在可测点内取前 5 个预报点时的各站最大相对误差分别为 4.2%, 3.5%, 0.8%, 4.0%。

表 2 各站的后报误差

Tab.2 The predicted errors of stations, Bohai Sea(8), Yellow Sea(43, 114), East China Sea(178)

| 8 号站 | | 43 号站 | | 114 号站 | | 178 号站 | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 时间 | 误差 | 时间 | 误差 | 时间 | 误差 | 时间 | 误差 |
| 1992 年 | | 1986 年 | | 1987 年 | | 1986 年 | |
| 5 月下旬 | 0.222 | 6 月中旬 | 0.261 | 9 月下旬 | 0.109 | 4 月中旬 | -0.528 |
| 6 月上旬 | 0.035 | 6 月下旬 | -0.081 | 10 月上旬 | -0.233 | 4 月下旬 | 0.017 |
| 6 月中旬 | -0.242 | 7 月上旬 | 0.462 | 10 月中旬 | -0.104 | 5 月上旬 | -0.110 |
| 6 月下旬 | -0.408 | 7 月中旬 | 0.699 | 10 月下旬 | -0.107 | 5 月中旬 | -0.810 |
| 7 月上旬 | -0.857 | 7 月下旬 | 0.004 | 11 月上旬 | 0.068 | 5 月下旬 | -0.701 |

3 结论

3.1 从渤、黄、东海十几年的旬平均 SST 的关联维数及二阶 Renyi 熵的结果分析, 表层水温具有混沌特性, 嵌入相空间维数及关联维数表明, 影响表层水温的参量为 2 到 6 个(渤、黄海)及 2 到 7 个(东海), 但这些参量的真实物理意义是什么还有待研究。

3.2 SST 后报结果表明应用相空间反演方法进行预报有一定的成效, 如果实测误差小, 资料容量大, 预报误差会减少; 另外, 预报长度也是预报中的一个关键问题, 提高实际预报长度还需要进一步探讨表层水温的不稳定局域。

参 考 文 献

- 丑纪范, 1986, 长期天气预报, 气象出版社(北京), 216—230。
 陈式刚, 1992, 映象与混沌, 国防工业出版社(北京), 103—106。
 李志锦等, 1995, 气象学报, 53(3): 271—280。
 Grassberger, P., Procaccia, J., 1983, *Physica*, 9D: 189—208。
 Grassberger, P., Procaccia, J., 1984, *Phys.*, 13D: 34—54。
 Nerenberg, M. A. H., Essex, C., 1990, *Phys. Rev.*, A42: 7065—7074。
 Wolf, A. et al., 1985, *Phys.*, 16D: 285—317。

APPLICATION OF INVERSE METHOD IN PHASE SPACE TO FORECAST SST

Wei Enbo, Tian Jiwei, Li Fengqi, Su Yusong

(Ocean Department of Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003)

Abstract Phase space theory and the inverse method were used to study the decadal average SST of the Bohai Sea, Yellow Sea and East China Sea. The results showed that the SST can be described as a chaotic phenomenon with phase space average correlation dimension, embedding dimension, two order Renyi entropy, and average predictable time scale of 1.23, 6 (Bohai Sea, Yellow Sea) or 7 (East China Sea), 3.7×10^{-4} (1/ d) and 27 points, respectively.

Use of the phase space method and the above results yielded the inverse equation of SST below.

$$\frac{dX}{dt} = A + BX + X^T CX \quad (1)$$

where, $X = \{x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)\}^T$; $\tau = 9\Delta t$.

$\{x(t_0 + i\Delta t), i = 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ is a SST time series, Δt is the time interval. Used the equation (1), the biggest prediction error of SST is about 4.2% within the first predictable five points. Main conclusions: (1) The analyzed stations' SST can be described by no more than six or seven and no less than two elements though we don't know clearly which corresponding elements affect SST. (2) Because of local chaotic traits and the whole predictable time scale controlled by Lyapunov exponent and two order Renyi entropy, the practical time scale is smaller than the whole predictable one.

Key words Correlation dimension Embedding dimension Lyapunov exponent
Two order Renyi entropy