

迎风有限元法在三维潮流数值模拟中的应用*

董文军 陈虹†

(天津大学数学系, †水利系, 天津 300072)

提要 为研究和开发迎风有限元法在河口海岸三维潮波数值模拟中的应用, 并为建立三维物质扩散模型, 最终为解决实际工程问题打下基础, 以非线性浅水波方程为基础, 采用一种平面迎风有限元与垂向隐式有限差分相结合的数值计算方法建立三维潮流数学模型。基于实际的物理过程, 在计算中将三维流动分成外重力波和内重力波, 耦联求解潮位和流速的空间分布。应用本模式计算了天津新港附近渤海海域的三维潮流运动, 以较高的分辨率揭示了潮流空间结构特征。

关键词 浅水波 迎风有限元 三维数值模拟

关于海岸三维潮流运动的数值模拟的研究迄今还很少, 并且以 Leendertse 等(1973)的三维非线性潮波微分方程有限差分格式为主。但是该模式对平面区域采用方形网格划分, 对边界拟合往往不理想。而从工程领域中发展起来的有限元法因其可以采用不同形式不规则的网格系统, 且剖分灵活、对边界拟合理想等特点正好能弥补上述不足。同时流体运动有别于固体, 对流体又不宜采用立体剖分, 用有限元法直接求解。这样本文结合浅水波的具体特点, 在 Leendertse 模式的基础上, 首次提出一种平面迎风有限元与垂向隐式有限差分相结合的数值计算方法来进行三维潮流数值模拟, 并对基本方程施行 σ -坐标变换(窦振兴等, 1993), 从而保证了计算区域各处具有相同的空间分辨率。对所述模式与理论公式进行了计算验证, 并应用所建立模型对包含天津新港、海河河口及永定新河河口的部分渤海海域的潮流运动作了具体的模型计算。

1 基本方程及边界条件

1.1 基本方程

根据浅水波理论(文圣常等, 1984), 得经过 σ -坐标变换 ($\sigma = \frac{z-\zeta}{H+\zeta}$) 后的三维浅水波基本方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + D \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - f v + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \end{aligned} \quad (1)$$

* 博士学位论文。董文军, 男, 出生于 1969 年 1 月, 博士生。

收稿日期: 1995 年 11 月 4 日, 接受日期: 1996 年 6 月 13 日。

$$=v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial \sigma}\right) + o_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{D} \bar{w} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + f u + g \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$=v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{D^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\varepsilon_z \frac{\partial v}{\partial \sigma}\right) + o_y \quad (3)$$

$$\rho g + \frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0 \quad (4)$$

其中, u, v 分别为水平 x, y 方向上的流速分量; ζ 为潮位; ρ 为压力; g 是重力加速度; f 是科氏力; $D \equiv H + \zeta \equiv h$; o_x 和 o_y 为方程坐标变换后产生的高阶微分项, 可忽略不计; ν 为水流粘滞系数; ε_z 为水流垂向粘滞系数, 在计算中取目前常用的计算公式

$$\varepsilon_z = \frac{Ku \cdot h}{6.0} \quad (5)$$

其中, K 为卡门常数 ($K=0.4$); u_s 为摩阻流速; h 为水深。 \bar{w} 是新坐标系下的垂向速度

$$\bar{w} = D \frac{d\sigma}{dt} = w - u \left(\sigma \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) - v \left(\sigma \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) - \left(\sigma \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) \quad (6)$$

并且满足

$$\begin{cases} \bar{w}(x, y, 0, t) = 0 \\ \bar{w}(x, y, -1, t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中, w 是实际流速垂向 (z) 分量。 u, v 在近海底处也应满足

$$\begin{cases} u(x, y, -1, t) = 0 \\ v(x, y, -1, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

1.2 边界条件

三维浅水环流在自由表面上和近海底处应满足动力学和运动学边界条件(于克俊等, 1987)。

水域岸边界处, 流速沿岸边界外法线方向分量为零。水域开边界处, 潮位作为已知量预先给定。

2 计算方法

在具体求解时, 为使计算方程封闭, 并充分利用已有的二维模型(吴克田, 1990), 采用过程分裂法的观点(Usseglio-polatera, 1988), 将三维潮流运动中的表面重力长波的传播与缓行的内重力波的传播分开, 构成内、外模式(窦振兴等, 1993), 在每步计算中, 由外模式求得潮位 ζ , 给内模式以求得空间点处的流速分量 u, v, \bar{w} ; 而内模式得出的速度偏差又会影响到外模式中 ζ 的计算, 这样内、外模式交替计算、耦联求解, 最终得到三维潮运动形态。

由低阶浅水波理论知, 浅水波中质点的水平加速度与垂向无关, 且质点的垂直方向运动变化要远远小于水平方向, 这样根据前面的讨论, 在具体数值求解方程(1) — (4) 时, 在水平和垂直方向采用两种数值计算体系, 提出一种平面迎风有限元与垂向隐式有限差分相结合的计算方法, 即在关于 u, v, \bar{w} 等水力要素的插值公式中, 将代表垂向坐

标的 σ 从插值函数 φ 中分离出来而与时变项放在一起, 即

$$\begin{cases} R(x, y, \sigma, t) = \sum_{j=1}^N R_j(t, \sigma) \cdot \varphi_j(x, y) \\ S(x, y, t) = \sum_{j=1}^N S_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \end{cases} \quad (9)$$

其中, R 代表与垂向 σ 有关的 u, v, w 和 \bar{w} ; S 代表与垂向 σ 无关的 ζ, D 和 H ; E 为单元总数; N 为节点总数; $\varphi_j (j=1, 2, \dots, N)$ 是线性单元的插值函数, 当计算区域用三角单元剖分时, 其公式形式为:

$$\varphi_j(x, y) = \sum_{e=1}^E \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}^e(x, y) \Delta_{\alpha j}^e$$

其中, $\Delta_{\alpha j}^e$ 为 Boole 矩阵, $N_{\alpha}^e(x, y)$ 为单元形状函数:

$$N_{\alpha}^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_{\alpha} + b_{\alpha}x + c_{\alpha}y)$$

其中, $a_{\alpha} = x_{\beta}y_{\gamma} - x_{\gamma}y_{\beta}$; $b_{\alpha} = y_{\beta} - y_{\gamma}$; $c_{\alpha} = x_{\gamma} - x_{\beta}$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, 并为反时针的循环置换; Δ^e 为三角元 e 的面积, 如图 1 所示。

3 差分格式

对方程 (1) — (3) 应用集中质量 Galerkin 原理 (吴江航等, 1988)。并对 (2), (3) 所得公式中有关水平二阶项的积分采用 Green 公式进行分部积分, 且假设 $\frac{\partial R}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$ (R 取 u 或 v); 水平对流项直接在结点的迎风单元中计算 (韩庆书等, 1985)。经化简最后得方程上述方程差分方程为:

$$A \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (B_3 + C_3) D^{n+1} + A \frac{\partial \bar{w}^{n+1}}{\partial \sigma} = 0 \quad (10)$$

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B_1 + G \frac{\partial u^{n+1}}{\partial \sigma} - f Av + D_1 = C_1 + E_1 \quad (11)$$

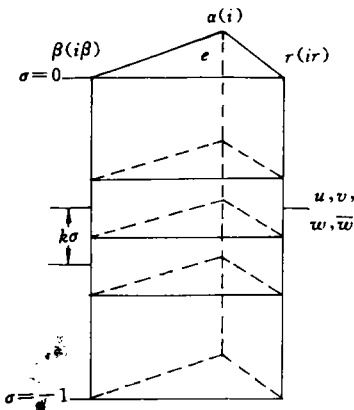


图 1 空间坐标网格

Fig.1 Space coordinates grid

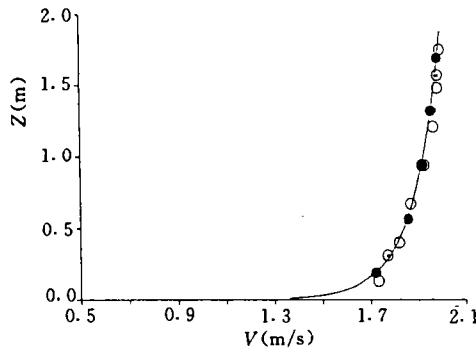


图 2 模型计算数值验证

Fig.2 Numerical verification of modelling calculation

— 理论值; \odot 3 结点计算值; \bullet 5 结点计算值; \circ 7 结点计算值。

$$A \frac{\partial v}{\partial t} + B_2 + G \frac{\partial v^{n+1}}{\partial \sigma} + f Au + D_2 = C_2 + E_2 \quad (12)$$

其中, $A, B_3, C_3, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ 和 G 均为对角矩阵, 其对角元素计算公式分别为:

$$\begin{aligned} [A]_{ii} &= A_i & [G]_{ii} &= A_i \frac{\sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^3 \bar{w}_k N_k^e \Delta_{ki}^e}{\sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^3 D_k N_k^e \Delta_{ki}^e} \\ [B_3]_{ii} &= A_i \sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \Delta_{ki}^e & [C_3]_{ii} &= A_i \sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \Delta_{ki}^e \\ [B_1]_{ii} &= A_i (a_{ii} u_i + a_{ii\beta} u_{ii\beta} + a_{ii\gamma} u_{ii\gamma}) & [B_2]_{ii} &= A_i (a_{ii} v_i + a_{ii\beta} v_{ii\beta} + a_{ii\gamma} v_{ii\gamma}) \\ [D_1]_{ii} &= A_i \sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^3 \zeta_k \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \Delta_{ki}^e & [D_2]_{ii} &= A_i \sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^3 \zeta_k \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \Delta_{ki}^e \\ [C_1]_{ii} &= -A_i \sum_{ik=1}^{n_i} b_{ik} u_{ik} & [C_2]_{ii} &= -A_i \sum_{ik=1}^{n_i} b_{ik} v_{ik} \\ [E_1]_{ii} &= -A_i \frac{1}{D_i^e} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\varepsilon_z \frac{\partial u_i}{\partial \sigma} \right) & [E_2]_{ii} &= -A_i \frac{1}{D_i^e} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\varepsilon_z \frac{\partial v_i}{\partial \sigma} \right) \end{aligned}$$

式中, A_i 为集中算子(吴江航等, 1985); n_i 为相邻结点数; 而

$$a_{ii} = \frac{1}{2\Delta^\omega} [u_i(y_{i\beta} - y_{i\gamma}) + v_i(x_{i\gamma} - x_{i\beta})]$$

$$a_{ii\beta} = \frac{1}{2\Delta^\omega} [u_i(y_{i\gamma} - y_i) + v_i(x_i - x_{i\gamma})]$$

$$a_{ii\gamma} = \frac{1}{2\Delta^\omega} [u_i(y_i - y_{i\beta}) + v_i(x_{i\beta} - x_i)]$$

$$b_{ik} = \sum_{e=1}^E \frac{v}{4\Delta^\omega} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\lambda=1}^3 [(x_\beta^\omega - x_\gamma^\omega)(x_\mu^\omega - x_\nu^\omega) + (y_\beta^\omega - y_\gamma^\omega)(y_\mu^\omega - y_\nu^\omega)] \Delta_{\alpha i}^e \Delta_{\lambda k}^e$$

其中, $i, i\beta, i\gamma$ 为结点 i 的迎风单元的三个顶点(逆时针方向旋转); x, y 为水平坐标; $\alpha, \beta, \gamma=1, 2, 3$; $\lambda, \mu, \nu=1, 2, 3$, 并为反时针的循环置换; 式中其他符号意义同前。

这样, 由差分方程(10), (11), (12)以及条件(7), (8)式, 根据边界条件和前时刻值就可以求得下时刻未知量 $u^{n+1}, v^{n+1}, \bar{w}^{n+1}$ 的值, 再根据(6)式由 \bar{w}^{n+1} 就可以进一步求得质点的垂向流速分量 w^{n+1} 。

4 模型验证与计算

4.1 模型验证

为验证上述模式, 将所建立的模型与恒定均匀流沿水深的流速对数分布公式

$$u = \bar{u} + \frac{u_*}{k} \left(1.0 + 2.3 \lg \left(\frac{z}{h} \right) \right) \quad (13)$$

作了数值计算对比, 当水深 h 取为 1.88m, 平均流速 \bar{u} 取 1.88m/s, 水体在垂向上取 3, 5,

7个计算结点时,不同深度处模型计算值与式(13)的理论值对比结果如图2所示。相对计算误差在0.52%—4.19%之间,拟合效果理想,说明了上述模型的数值理论和参数的选取是切实可行的。

4.2 实际计算

利用上述三维计算模式,对地理位置重要,包括天津新港、海河河口及永定新河河口的渤海湾北部进行了具体数值模拟计算。模型范围南至歧口向东延深至10m水深处,再向北延至湾顶的南堡,模型范围内水深最大为20m。由于天津新港及永定新河河口邻近区域地形变化比较复杂,为能较好地对上述区域进行水流模拟,在此区域内加密剖分网格。结点间距 ΔS 最大为1800m,最小为250m,计算节点1960个,剖分单元3701个。根据C-F-L稳定性条件 $\Delta t \leq \Delta S_{\min} / (2gh_{\max})^{1/2}$,时间步长 Δt 取为10s。并在垂向取5个剖分点。

对上述区域内典型潮进行了三维潮流数值模拟。计算后对计算区域内11个测点处海水表层与实测流态进行了验证(如图3所示)。从图中可以看到,计算海域主要处于左旋区,在模型南部区域潮流明显左旋,而在北部,邻近南堡海域则左旋不明显,几乎为往复流形式。由验证结果看出,模型对所取典型潮的拟合较为一致,表明采用本文所述数值方法进行模拟是能够反映实际情况的。

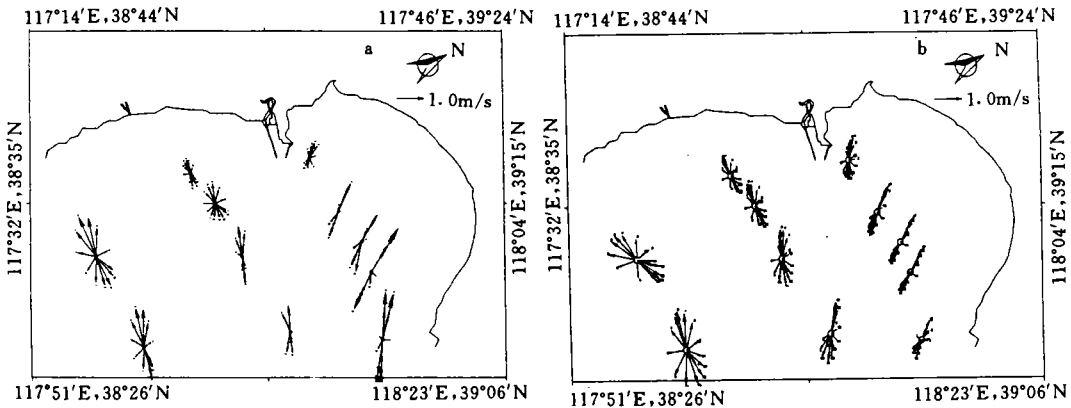


图3 典型潮流(a)和计算流(b)流态

Fig.3 Fluidity of typical (a) and calculated (b) tides

由某涨潮时表层与底层计算流场(图4)可以看出,不同水层间流速差别比较明显。流速椭圆随着接近海底而逐渐变小,并且越接近海底,椭圆长轴衰减越快。再由沿以永定新河河口为起点的深泓线的纵剖面流场(图5)可见,涨潮时,海水向河口方向流动并涌入永定新河内;落潮时,海水从河口退向海域,并且各层水流随着地势走向而作相应的升降运动。另外,通过计算表明,计算海域的垂向流速 w 很小,在平坦区域, w 一般在0.03cm/s左右,而在海底地形变化剧烈区域, w 较大,但仍小于0.1cm/s。

上述分析说明,模型的计算结果是与实际物理现象相符的,表明模型对实际三维潮流的模拟是行之有效的。

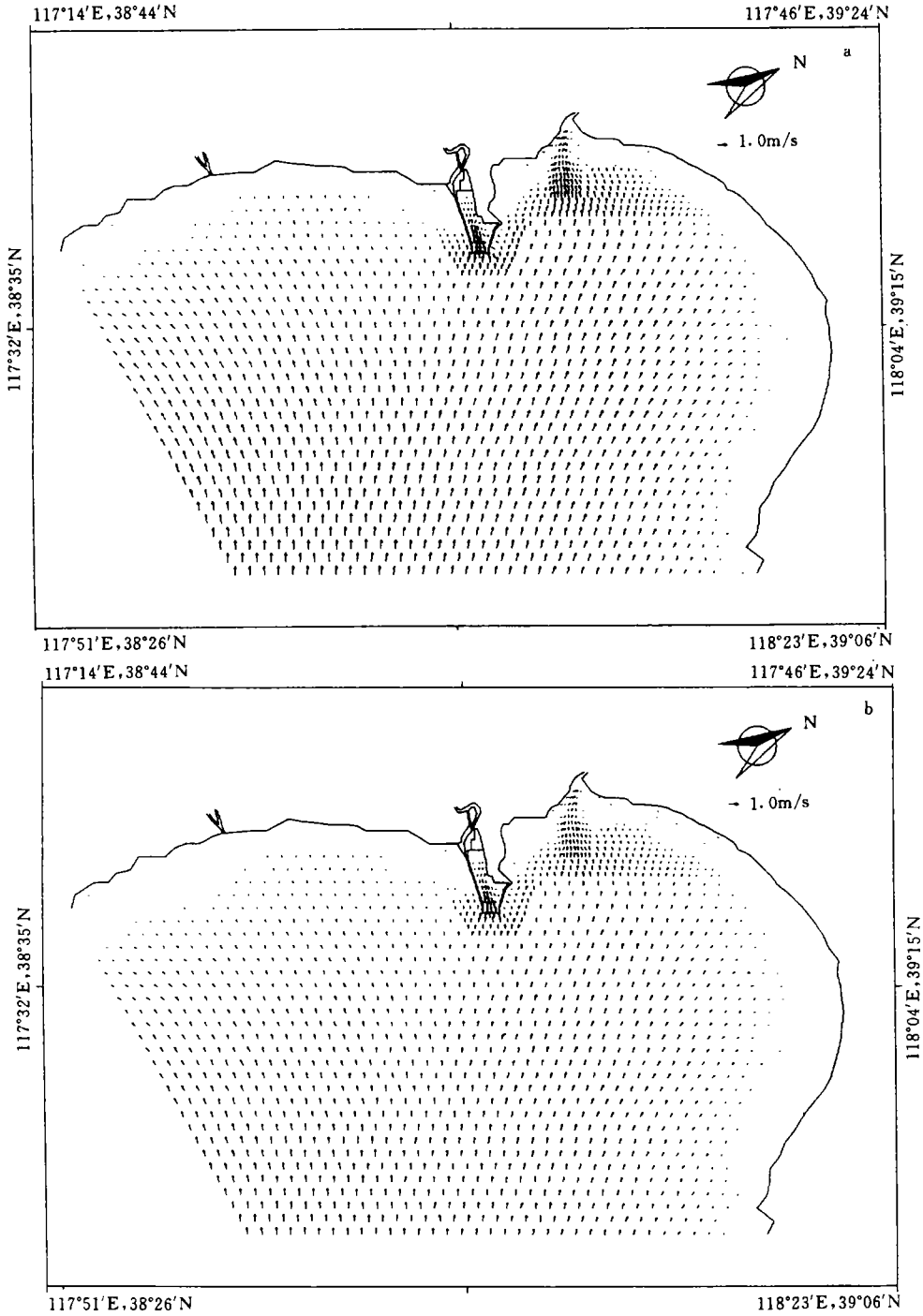


图4 某涨潮表层(a)与底层(b)流场

Fig.4 Flow field near surface (a) or bottom of ebb (b) tide

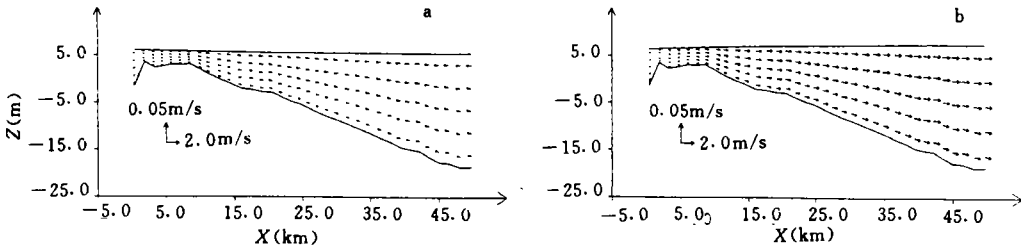


图5 涨潮(a)和落潮(b)时沿深泓线纵剖面流场

Fig.5 Profile of flow field of ebb (a) and flowing (b) tide along a channel line

5 结语

5.1 根据浅水波的具体特点, 在非线性浅水波方程的基础上应用平面有限元与垂向有限差分相结合的数值方法, 建立三维潮流数学模型, 将有限元法中对计算区域能够灵活剖分处理的特点引入到三维模式中。

5.2 在垂向上使用 σ 坐标变换, 提高了流场在浅水部分的垂向分辨率。

5.3 由实际的物理现象, 计算中直接在结点 i 的迎风单元中计算水平对流项。并且为使计算稳定, 计算中还考虑了水平粘性项的作用。

5.4 模型对流速垂线对数分布公式有良好的拟合效果。

5.5 应用所建立的模型对实际水域作了计算, 揭示了包含天津新港、海河河口及永定新河河口的部分渤海海域的三维潮流运动。由于缺乏实测资料, 模型只能对表层流态进行初步验证, 但通过分析可知, 模型计算符合实际情况。

5.6 本文结合浅水波特点, 将有限元法引入到三维潮流数值模拟中, 目的在于将不同数值方法相结合, 取长补短, 在三维潮流数值模拟中应用方面作一初步研究。

参 考 文 献

- 于克俊、张法高, 1987, 海洋与湖沼, 18(3): 227—236。
 文圣常、余宙文, 1984, 海浪理论与计算原理, 科学出版社(北京), 1—23。
 吴江航、韩庆书, 1988, 计算流体力学的理论、方法及应用, 科学出版社(北京), 204—213。
 吴克田, 1990, 计算物理, 7(1): 1—6。
 韩庆书、吕甘雨, 1985, 计算物理, 2(2): 183—192。
 窦振兴等, 1993, 海洋学报, 15(5): 1—15。
 Leendertse, J. J. et al., 1973, *Principles of Computation*, 1: 1—56。
 Usseglio-polatera, J. M., 1988, *Computational Methods in Water Resource*, 36(2): 427—440。

APPLICATION OF AN UPWIND FINITE ELEMENT METHOD IN THREE DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATION OF TIDAL MOTION

Dong Wenjun, Chen Hong[†]

(*Department of Mathematics, [†]Department of Hydraulics, Tianjin University, Tianjin 300072*)

Abstract Based on nonlinear shallow water wave equations, a numerical calculation of horizontal upwind finite elements combined with vertical implicit finite difference method are adopted to set up this three dimensional tide current mathematical model. σ -coordinates are applied to control equation for transformation so as to have similar spatial resolution everywhere in the calculating domain. For the equations set up, based on the practical physical process, the three dimensional flow is divided into external and internal gravity waves, are used to solve tide level and velocity spatial distribution, respectively. Verification by calculation with the model and theoretical formula yielded ideally similar results. The model was applied to calculate the partial sea field of the Bohai Sea including Tianjin Newgang Habor, Haihe River and the Yongdingxin River stuary. The spatial structure characteristics of tide current in the region is revealed by using corresponding actual measurent data. This study aimed to reaserch application of upwind finite element method in the field of three dimensional numerical simulation of tidal motion, and lay the foundation for setting up three dimensional sediment model for solving construction project problems.

Key words Shallow-water wave Upwind finite element Three dimensional numerical simulation