二阶非线性随机海浪波面高度和波面垂直速度的联合分布*

管 长 龙

(青岛海洋大学物理海洋研究所，物理海洋实验室，青岛 266003)

提要 基于 Longuet-Higgins 提出的非线性随机海浪模型，在二阶近似下通过直接计算联合分布的各阶矩，导出了非线性海浪波面高度和波面垂直速度的联合分布。该分布为非正态，其形式为截断的级数，而非由累积矩母函数方法可能得到的渐近无穷级数。由于非线性的影响，波面高度与波面垂直速度不再相互独立。

关键词 非线性 波面和波面垂直速度 联合分布 海浪

以往，由非线性随机海浪模型 (Longuet-Higgins, 1963) 导出海浪要素的统计分布均采用累积矩母函数 (cumulant-generating function) 方法，得到的分布为渐近无穷级数 (Longuet-Higgins, 1963; Jackson, 1979; Srokosz, 1986)。在应用中只取级数前几项，舍去高阶项的根据是由于样本的涨落，高阶累积矩不可靠。然而，Huang 等 (1980) 的实验表明，高阶累积矩的分散很小。孙孚等 (1994) 在三阶近似下，用直接求矩方法导出非线性海浪波面分布为截断的 Gram-Charlier级数，从物理上解释了 Huang 等 (1980) 提出的问题。管长龙等 (1996)[1)] 应用直接求矩方法，在更普遍的情形下给出了级数的截断与非线性随机海浪模型近似阶次的关系，进一步解释了 Huang 等提出的问题。本文工作的出发点为：(1) 迄今在文献中尚未见到非线性海浪波面高度和波面垂直速度的联合分布，无论从海浪统计理论本身还是从实际应用方面来看，均有必要给出这一联合分布；(2) 直接求矩方法在导出非线性海浪波面高度统计分布 (为单随机变量分布) 上，给出了具有物理意义的理论结果。无疑，将其应用于非线性海浪要素联合分布的研究是有意义的理论探索。

1 非线性随机海浪模型

依 Longuet-Higgins (1963)，非线性随机海浪的波面高度 η 可表示为：

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \cdots \tag{1}$$

其中：$\eta_1 = \alpha_i \zeta_i$，$\eta_2 = \alpha_{ij} \zeta_i \zeta_j$，$\zeta_i = a_i \cos\psi_i$，$\psi_i = \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega_i t + \varepsilon_i$。式中，$\boldsymbol{r}$ 为静止水面上的位置矢量；a_i，ψ_i，ω_i，$\boldsymbol{k}_i$ 分别为第 i 个组成波的振幅、位相、圆频率及波数矢量；ε_i 为第 i 个组

* 国家自然科学基金资助项目，49676274号。管长龙，男，出生于1963年3月，博士后，副教授。

本文研究得到国家教委资助的青岛海洋大学物理海洋实验室上层海洋动力学课题组的帮助，谨志谢忱。

收稿日期：1996年5月31日，接受日期：1996年8月19日。

1) 管长龙、孙孚，1996，四阶非线性海浪波面高度的统计分布，中国科学 (D)。(待发表)

成波的随机初位相,均匀分布于区间 $[0, 2\pi]$ 上;α_i, α_{ij} 为系数,其中 α_{ij} 体现了两个组成波间的相互作用。对于深度为 $d(\boldsymbol{r})$ 的不可压缩无旋运动的理想流体,这些系数原则上可由下列方程确定:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & (-d \leqslant z \leqslant \eta) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta + \dfrac{1}{2}\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = 0 & (z = \eta) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \nabla\eta & (z = \eta) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \nabla\varphi \cdot \nabla d = 0 & (z = -d) \end{cases} \tag{2}$$

式中,φ 为运动势函数;Δ 为三维 Laplace 算子;∇ 为二维梯度算子;z 轴铅直向上。由式(1)可得到波面垂直速度 $\dot{\eta} = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}$,为:

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2 + \cdots \tag{3}$$

式中:$\dot{\eta}_1 = \alpha_i \omega_i \xi_i$; $\dot{\eta}_2 = \alpha_{ij}(\omega_i \xi_i \zeta_j + \omega_j \zeta_i \xi_j)$;$\cdots$;$\xi_i = -a_i \sin\psi_i$。

2 矩的计算

当非线性随机海浪模型取至二阶近似时,海浪波面高度和波面垂直速度分别为:

$$\begin{cases} \eta = \eta_1 + \eta_2 \\ \dot{\eta} = \dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2 \end{cases} \tag{4}$$

若在 $\eta^m \dot{\eta}^n$(m, n 为正整数)中计及二阶量 η_2, $\dot{\eta}_2$ 的影响,则应至少保留至包含 η_2(或 $\dot{\eta}_2$)的一次幂的项,即:

$$\eta^m \dot{\eta}^n = \eta_1^m \dot{\eta}_1^n + m\eta_1^{m-1}\dot{\eta}_1^n \eta_2 + n\eta_1^m \dot{\eta}_1^{n-1}\dot{\eta}_2 \tag{5}$$

利用随机变量 ψ_i 的性质:$\overline{\cos\psi_i} = \overline{\cos\psi_i \sin\psi_j} = 0$;$\overline{\cos\psi_i \cos\psi_j} = \overline{\sin\psi_i \sin\psi_j} = \dfrac{1}{2}\delta_{ij}$,并注意到奇数个随机量乘积的均值为零,可以直接计算式(5)右端诸项的均值。为简便起见,又不失一般性,可取 $\alpha_i = 1$。计算结果为:

$$\begin{cases} \overline{\eta_1^{2M+1}\dot{\eta}_1^{2N}} = \overline{\eta_1^{2M+1}\dot{\eta}_1^{2N+1}} = \overline{\eta_1^{2M}\dot{\eta}_1^{2N+1}} = 0 \\ \overline{\eta_1^{2M}\dot{\eta}_1^{2N}} = \dfrac{(2M)!\,(2N)!}{M!\,N!}\left(\dfrac{\sigma_0^2}{2}\right)^M \left(\dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)^N \\ \overline{\eta_1^{2M-1}\dot{\eta}_1^{2N}\eta_2} = \overline{\eta_1^{2M-1}\dot{\eta}_1^{2N+1}\eta_2} = \overline{\eta_1^{2M}\dot{\eta}_1^{2N+1}\eta_2} = 0 \\ \overline{\eta_1^{2M}\dot{\eta}_1^{2N}\eta_2} = \dfrac{(2M)!\,(2N)!}{M!\,N!}\left(\dfrac{\sigma_0^2}{2}\right)^M \left(\dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)^N \left[C(2) + C(1^2,\ 2)\left(\dfrac{2}{\sigma_0^2}\right)M\right] \\ \overline{\eta_1^{2M}\dot{\eta}_1^{2N-1}\dot{\eta}_2} = \overline{\eta_1^{2M}\dot{\eta}_1^{2N}\dot{\eta}_2} = \overline{\eta_1^{2M+1}\dot{\eta}_1^{2N}\dot{\eta}_2} = 0 \\ \overline{\eta_1^{2M+1}\dot{\eta}_1^{2N-1}\dot{\eta}_2} = \dfrac{(2M+1)!\,(2N-1)!}{M!\,(N-1)!}\left(\dfrac{\sigma_0^2}{2}\right)^M \left(\dfrac{\sigma_1^2}{2}\right)^{N-1} \cdot 2\overline{C}(1^2,\ 2) \end{cases} \tag{6}$$

式中,M,N 为正整数。若记 $V_i=\overline{\zeta_i\zeta_i}=\overline{\xi_i\xi_i}$,则有:

$$\begin{cases}\sigma_0^2=\sum\limits_{i=1}^{\infty}V_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_i^2=\int E(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k}\\ \sigma_1^2=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega_i^2V_i=\int\omega^2(\boldsymbol{k})E(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k}\\ C(2)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_{ii}V_i=\int\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})E(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k}\\ C(1^2,\ 2)=\sum\limits_{i,\ j=1}^{\infty}\alpha_{ij}V_iV_j=\int\alpha(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}_1)E(\boldsymbol{k})E(\boldsymbol{k}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\\ \overline{C}(1^2,\ 2)=\sum\limits_{i,\ j=1}^{\infty}\omega_i^2\alpha_{ij}V_iV_j=\int\omega^2(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}_1)E(\boldsymbol{k})E(\boldsymbol{k}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\end{cases}\tag{7}$$

式中,$E(\boldsymbol{k})$ 为线性意义下的海浪波数谱;系数 $C(\cdots)$ 为反映不可约耦合波-波相互作用的量,如 $C(1^2,2)$ 表示由 2 个一阶量和 1 个二阶量构成的不可约耦合波-波相互作用。将式(6)代入式(5),得到:

$$\overline{\eta^{2M}\dot{\eta}^{2N}}=\frac{(2M)!(2N)!}{M!N!}\left(\frac{\sigma_0^2}{2}\right)^M\left(\frac{\sigma_1^2}{2}\right)^N\tag{8a}$$

$$\overline{\eta^{2M}\dot{\eta}^{2N+1}}=0\tag{8b}$$

$$\overline{\eta^{2M+1}\dot{\eta}^{2N}}=\frac{(2M+1)!(2N)!}{M!N!}\left(\frac{\sigma_0^2}{2}\right)^M\left(\frac{\sigma_1^2}{2}\right)^N\left[C(2)+2\overline{C}(1^2,\ 2)\left(\frac{2}{\sigma_1^2}\right)N+C(1^2,\ 2)\left(\frac{2}{\sigma_0^2}\right)M\right]\tag{8c}$$

$$\overline{\eta^{2M+1}\dot{\eta}^{2N+1}}=0\tag{8d}$$

3　联合分布

依概率论,联合概率密度分布函数 $f(\eta,\dot{\eta})$ 的特征函数为:

$$\varphi(it_0,\ it_1)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\eta,\ \dot{\eta})\exp[i(\eta t_0+\dot{\eta}t_1)]\,\mathrm{d}t_0\mathrm{d}t_1=\sum_{m,\ n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\overline{\eta^m\dot{\eta}^n}(it_0)^m(it_1)^n\tag{9}$$

将式(8)代入式(9),得到:

$$\varphi(it_0,\ it_1)=\exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_0^2t_0^2+\sigma_1^2t_1^2)\right][1+C(2)(it_0)+2\overline{C}(1^2,\ 2)(it_0)(it_1)^2+C(1^2,\ 2)(it_0)^3]\tag{10}$$

联合分布 $f(\eta,\dot{\eta})$ 可由特征函数 $\varphi(it_0,it_1)$ 的傅氏逆变换求出:

$$f(\eta,\ \dot{\eta})=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi(it_0,\ it_1)\exp[-i(\eta t_0+\dot{\eta}t_1)]\,\mathrm{d}t_0\mathrm{d}t_1\tag{11}$$

将式(10)代入式(11),得到非线性海浪波面高度和波面垂直速度的联合分布为:

$$f(\eta,\ \dot{\eta}) = \frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma_1}\exp\left[-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right]\left[1+\frac{C(2)}{\sigma_0}H_1(u) + 2\frac{\overline{C}(1^2,\ 2)}{\sigma_0\sigma_1^2}H_1(u)H_2(v) + \frac{C(1^2,\ 2)}{\sigma_0^3}H_3(u)\right] \tag{12}$$

式中,$u=\dfrac{\eta}{\sigma_0}$,$v=\dfrac{\dot{\eta}}{\sigma_1}$,$H_n(x)$为 n 阶 Hermite 多项式,前三阶的形式为:

$$\begin{cases} H_1(x) = x \\ H_2(x) = x^2 - 1 \\ H_3(x) = x^3 - 3x \end{cases} \tag{13}$$

式(12)表明,考虑了非线性的影响后,海浪波面高度和波面垂直速度的联合分布不再是正态的,而且式(12)亦不能分解成$f(\eta,\ \dot{\eta}) = f(\eta)g(\dot{\eta})$的形式,即波面高度和波面垂直速度不再是相互独立的随机量。若不考虑非线性的作用,即 $C(2)$,$\overline{C}(1^2,2)$,$C(1^2,2)$均为零,则式(12)恢复到线性的结果,为二维正态分布。将$f(\eta,\ \dot{\eta})$对$\dot{\eta}$在$[-\infty,\infty]$上积分,则得到:

$$f(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta,\ \dot{\eta})\mathrm{d}\dot{\eta} = \frac{1}{2\pi\sigma_0}e^{-\frac{1}{2}u^2}\left[1+\frac{C(2)}{\sigma_0}H_1(u) + \frac{C(1^2,\ 2)}{\sigma_0^3}H_3(u)\right] \tag{14}$$

与单独讨论非线性海浪波面统计分布时得到的二阶近似结果一致[1)]。

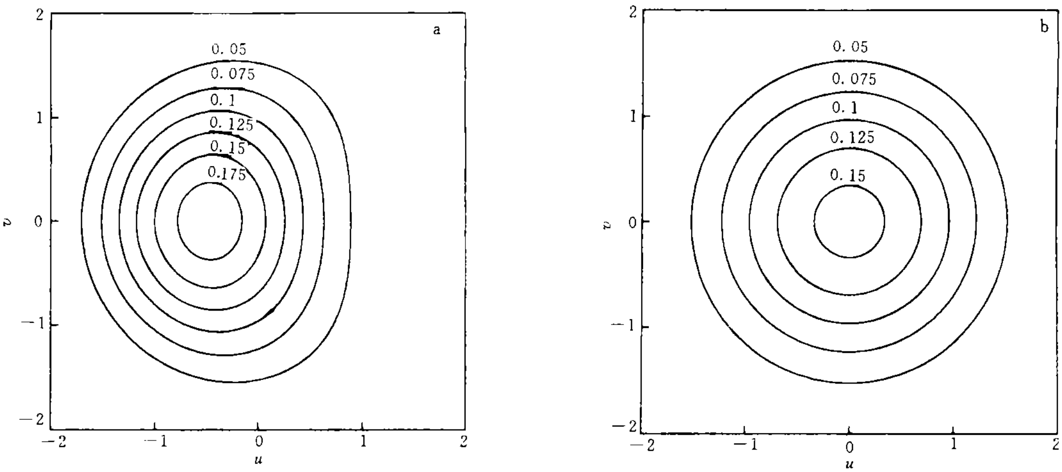

图1　联合分布$f(u,v)$的等值线

Fig.1　Isolines of joint distribution $f(u,\ v)$

a. 二阶非线性结果; b. 线性结果。

从式(7)可见,式(12)中 Hermite 多项式前的系数是从海浪的内部结构即谱与波-波相互作用的角度描述了波面高度和波面垂直速度的联合分布。这些系数可由联合分布的各

1) 见第503页脚注1)。

阶矩表示。由式(8a)和(8c)可得到:

$$\begin{cases} \sigma_0^2 = \mu_{20},\ \sigma_1^2 = \mu_{02},\ C(2) = \mu_{10} \\ 2\overline{C}(1^2,\ 2) = \dfrac{1}{2}\mu_{12} - \dfrac{1}{2}\mu_{10}\mu_{02} \\ C(1^2,\ 2) = \dfrac{1}{6}\mu_{30} - \dfrac{1}{2}\mu_{10}\mu_{20} \end{cases} \tag{15}$$

这里,$\mu_{mn} = \overline{\eta^m\dot{\eta}^n}$。将式(15)代入式(12),可得到以矩作为参数的联合分布。为便于实际应用的形式,联合分布$f(u,v)$的等值线(图1)表明了二阶非线性结果与线性结果的差异。

4 结论

4.1 研究认为直接求矩方法用于导出联合分布是可行的,得到的海浪波面高度和波面垂直速度的联合分布为截断的级数,而不是由累积矩母函数方法可能得到的渐近无穷级数。当非线性海浪波面取至二阶近似,相当于物理上仅考虑了$C(2)$,$\overline{C}(1^2,2)$,$C(1^2,2)$三种非线性波-波相互作用的类型对联合分布的影响,并决定了式(12)截断于H_3。

4.2 由于非线性的作用,海浪波面高度与波面垂直速度的联合分布为非正态的,并且二者不是相互独立的。

4.3 虽然本文只就二阶非线性近似导出波面高度与波面垂直速度的联合分布,但此一思路可适用于三阶或三阶以上近似的情况。同样,虽然本文只就两个随机就量的联合分布进行了讨论,但直接求矩方法可用于三个或三个以上海浪要素非线性联合分布的推导。

本文为理论性工作,所导出的结果还有待于进一步的外海观测或室内实验加以验证。

参　考　文　献

孙孚、丁平兴,1994,中国科学(B),**24**(8):859—865。

Huang, N. E., Long, S. R., 1980, *J. Fluid Mech.*, **101**(1):179—200.

Jackson, F. C., 1979, *J. Geophys. Res.*, **84**:4939—4943.

Longuet-Higgins, M. S., 1963, *J. Fluid Mech.*, **17**:459—480.

Srokosz, M. A., 1986, *J. Geophys. Res.* (C), **91**(1): 995—1006.

JOINT DISTRIBUTION OF SURFACE ELEVATION AND ITS VERTICAL VELOCITY FOR THE SECOND ORDER NONLINEAR RANDOM SEA WAVES

Guan Changlong

(Institute of Physical Oceanography and Physical Oceanography Laboratory, Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003)

Abstract On the basis of the nonlinear model for random sea waves presented by Longuet-Higgins, the joint distribution of wave surface elevation η and its vertical velocity $\dot{\eta}$, accurate to second order approximation, is derived by calculating directly each moment of the joint distribution. The derived distribution is in form of the truncated series

$$f(\eta,\ \dot{\eta}) = \frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma_1}\exp[-\frac{1}{2}(u^2+v^2)][1+S_{10}H_1(u)+S_{12}H_1(u)H_2(v)+S_{30}H_3(u)]$$

where $u=\frac{\eta}{\sigma_0}$, $v=\frac{\dot{\eta}}{\sigma_1}$ and $H_n(x)$ the Hermite polynomial of degree n, rather than of the asymptotic infinite one, which is the probable result by the cumulant-generating function method. The truncation of the series is related physically to the order of the nonlinear approximation. Owing to nonlinearity of sea waves, the distribution is non-Gaussian, and η and $\dot{\eta}$ are no longer independent of each other.

Key words Nonlinearity Surface elevation and its vertical velocity Joint distribution Sea waves