

斜压海洋动力学的一种三维数值模式*

I. 动力学方程数值格式

方国洪 于克俊

(中国科学院海洋研究所 青岛 266071)

提要 依据自由海面海洋动力学原始方程组建立了一种三维有限差分数值模式,可用于潮波、风暴潮和海流的数值模拟和预报。运动方程和连续方程的数值格式采用了内、外模态分离的技术。外模态采用交替方向隐格式,用于计算海面高度和垂直平均流速,时间步长不受 Courant-Friedrichs-Lewy 条件限制;内模态采用半隐格式,用于计算海流的垂直分布,其时间步长可大于外模态时间步长。模式的计算速度比一般显式模式可快 10 倍以上。

关键词 三维 斜压 海洋模式 自由海面

学科分类号 P731

原始方程海洋数值模式大致可以分为两大类型,一类是自由海面模式,它可以模拟惯性-重力波;另一类模式引入了刚盖近似,滤去了重力波。本模式属于前一类。目前已有不少自由海面的斜压海洋模式,例如 Leendertse 等 (1977), Backhaus (1985) 及 Mellor (1993)。Leendertse 模式没有对内、外模态进行分离,并采用了基本上属于显格式的数值方法,故时间步长受到 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件的限制。Backhaus 模式采用了半隐格式,其时间步长不受 CFL 条件限制,但因该模式内、外模态同步计算,其计算量仍较大。Mellor 模式采用内、外模态分离计算技术,显著减少了内模态计算量,但因外模态采用显格式,外模态步长仍受 CFL 条件限制。本研究提出的模式,既采用了内、外模态分离技术,又在外模态计算中采用了交替方向隐式 (ADI) 格式,从而显著提高了计算效率。

1 原始方程组

为了使模式适用于东海和南海等具有宽广尺度的海区,采用下列球面坐标下海洋动力学原始方程组:

$$\begin{aligned} & \partial_t u + (R \cos \phi)^{-1} u \partial_{\lambda} u + R^{-1} v \partial_{\phi} u + w \partial_z u - R^{-1} u v \operatorname{tg} \phi \\ & = (2 \Omega \sin \phi) v - (\rho_0 R \cos \phi)^{-1} \partial_{\lambda} p + \partial_z (v \partial_z u) \\ & + (R \cos \phi)^{-2} A [\partial_{\lambda \lambda} u + \cos \phi \partial_{\phi} (\cos \phi \partial_{\phi} u)] \end{aligned} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目,49136142,49576208号;国家科委资助项目,85-903-08-02号。方国洪,男,出生于1939年12月,博士导师,研究员,E-mail: ghfang@ms.qdio.ac.cn

收稿日期:1996-01-16,收修改稿日期:1997-09-09

$$\begin{aligned} & \partial_t v + (R \cos \phi)^{-1} u \partial_\lambda v + R^{-1} v \partial_\phi v + w \partial_z v + R^{-1} u^2 \operatorname{tg} \phi \\ & = - (2\Omega \sin \phi) u - (\rho_0 R)^{-1} \partial_\phi p + \partial_z (v \partial_z v) \\ & \quad + (R \cos \phi)^{-2} A [\partial_{\lambda\lambda} v + \cos \phi \partial_\phi (\cos \phi \partial_\phi v)] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\partial_z p = \rho g \quad (3)$$

$$(R \cos \phi)^{-1} [\partial_\lambda u + \partial_\phi (v \cos \phi)] + \partial_z w = 0 \quad (4)$$

其中, λ, ϕ 为东经和北纬; z 为深度, 自未扰动海面向下为正; t 为时间; v, u, w 为 λ, ϕ, z 方向海流分量; p 为压强; R 为地球半径; g 为重力加速度; ρ 为现场海水密度; ρ_0 为海水平均密度, 可取为常数; ν, A 为垂直和水平涡动粘性系数; $\partial_z \equiv \partial / \partial z$; 其余类似。式(3)中海水密度 ρ 决定于海水温度和盐度, 当本模式用于正压动力学问题时可取为常数, 即与 ρ_0 相同; 在进行斜压海流的诊断计算时, ρ 不随时间变化, 是空间的已知函数; 在进行斜压海流的预测计算时, ρ 随时间而变¹⁾。垂直涡动粘性系数 ν 还是一个不十分确定的数值。在大洋环流的计算中常常取它仅与 z 有关。在陆架海, 为简单起见仍然可以把它取作常数或依赖于 z 的一个简单函数。但一般认为较合理的作法是取与流场有关的量。一个比较符合实际且计算量较小的方法可根据混合长度理论导出 (Fang *et al.*, 1983)¹⁾。水平粘性系数的了解要比垂直粘性系数少得多, 故常取其等于 10 至 $1 \times 10^4 \text{m}^2 / \text{s}$ 之间的一个常数。一般网格越细, 其值应越小。

设海面相对于未扰动海面高度为 $z = -\zeta$, 则这里运动学和动力学边界条件为:

$$\partial_t \zeta + (R \cos \phi)^{-1} u \partial_\lambda \zeta + R^{-1} v \partial_\phi \zeta = -w \quad (5)$$

$$\nu \partial_z (u, v) = -(\tau_x, \tau_y) \quad (6)$$

$$p = p' \quad (7)$$

其中, τ_x, τ_y 为海面风应力在 λ, ϕ 方向的分量; p' 为大气压强。将式(7)代入式(3)可得深度 z 处的压强:

$$p = p' + g \int_{-\zeta}^z \rho dz' \approx p' + g \rho_0 \zeta + g \int_0^z \rho dz' \quad (8)$$

在海底 $z = h$ 处, 有:

$$(R \cos \phi)^{-1} u \partial_\lambda h + R^{-1} v \partial_\phi h = w \quad (9)$$

$$\nu \partial_z (u, v) = r(u_b^2 + v_b^2)^{1/2} (u_b, v_b) \quad (10)$$

2 计算网格

图 1 展示各变量在 (λ, ϕ) 平面和 (λ, z) 平面上的配置。 (ϕ, z) 平面上计算点配置与 (λ, z) 平面类似。在 (λ, ϕ) 平面上 (图 1a), τ 和 h 点的位置和 ζ 点相同, 在同一 (λ, ϕ) 点还有各层的 w, T, S, ρ, p 点。在 (λ, z) 平面上 (图 1b), T, ρ, p 点的位置与 S 点相同。

在垂直方向上水体被划分成 K 层。第一层的厚度为 $\Delta_1 + \zeta$, 随海面起伏而变动, 下面的各层厚度不随时间而变, 记为 $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_K$ 。为了能包含整个海洋, 要求 $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_K$ 不小于海区的最大水深。各层中间面之间的距离记作 Δ'_k ; $\Delta'_k \equiv (\Delta_k + \Delta_{k+1}) / 2$ 。在计算区域内, 起伏不平的海底用台阶的底形代替。设第 (i, j) 点, 实际水深值为 h_{ij}^* , 为了与

1) 有关计算方法参看本文II, 1998. 海洋与湖沼, 29卷4期, 待刊

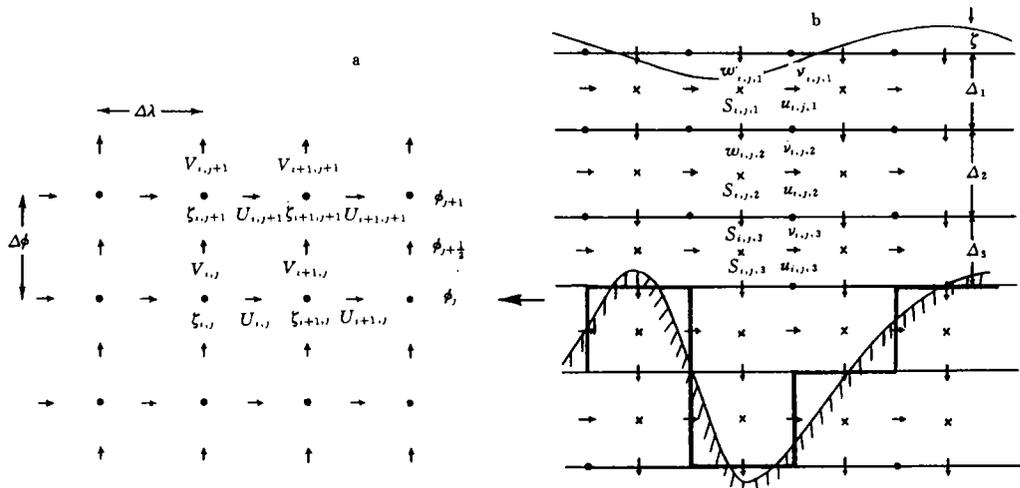


图 1 计算网格配置图

Fig.1 Layout of the computational grid

a. (λ, ϕ) 平面上的配置; b. (λ, z) 平面上的配置 (其位置如图 a 右边粗箭头所示)

图 1 中的网格相匹配, 用 h_M 代替 h^* , $h_M = \sum_{k=1}^M \Delta_k$, 它满足 $\left| 1 - \sum_{k=1}^M \Delta_k / h^* \right| = \min$, ($M =$

$1, 2, \dots, K$), 亦即, 将各点的水深值 h^* 都按上式要求换成 h_M , M 与 (i, j) 有关。第 (i, j) 个水柱内, 计算的层数就是 $M_{i,j}$ 。对应地第 (i, j) 个 u 点和 v 点的层数分别取 $Kx_{i,j} = \min(M_{i,j},$

$M_{i+1,j}), Ky_{i,j} = \min(M_{i,j}, M_{i,j+1})$ 。当然, 相应的 u 点和 v 点水深分别为 $hx_{i,j} = \sum_{k=1}^{Kx}$

$\Delta_k, hy_{i,j} = \sum_{k=1}^{Ky} \Delta_k$, 这里 \sum 上面的 Kx 和 Ky 均有下标 i, j , 为简略, 这里省略不写。

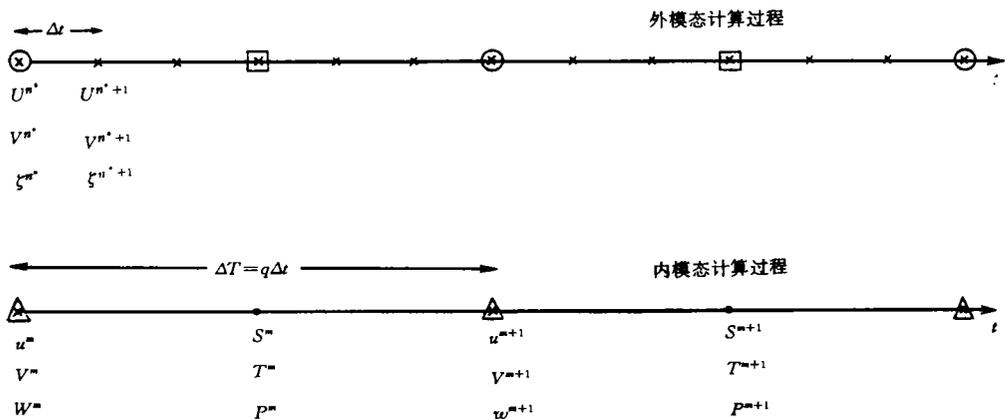


图 2 外模态与内模态的匹配关系

Fig.2 The coupling relation between the external and internal mode computations

⊗ 各变量及⊠的 ζ 值保留用于内模态计算; \triangle 各变量用于计算外模态方程中的平流和底摩擦项

$$\text{令 } (U, V) \text{ 为 } (u, v) \text{ 的垂向平均值, 即 } (U, V) = \frac{1}{H} \int_{-\zeta}^h (u, v) dz \quad (11)$$

其中, $H = h + \zeta$; (U, V) 称为海流的外模态分量, 它们是 (λ, ϕ, t) 的函数; $(u', v') = (u - U, v - V)$ 称为内模态分量, 与 (λ, ϕ, z, t) 有关。

本模式采用内、外模态分离计算技术, 两者的计算时间步长可以不同。外模态时间步长为 Δt , 内模态时间步长 $\Delta T = q\Delta t$ 。为方便, 这里 q 取偶数, 外模态和内外模的匹配关系见图 2(图中 $q = 6$)。有关的耦合计算过程将在介绍了差分方程以后给予说明。

3 差分方程

3.1 平流项、底摩擦项和浮力项的计算

设 $t = m\Delta T$ 时刻 u, v, w, ν, μ 及 $t = (m + 1/2)\Delta T$ 时刻的 S, T, ρ, p 已算出, 同时 $t = m\Delta T = n^*\Delta t$ ($n^* = qm$) 时刻的 U, V, ζ 也已算出, 则平流项、底摩擦项和浮力项便可通过下面的步骤计算。为了书面简略, 在下面式子中, 有关量的时间标记(一般应放在右上角)将都省略不写; 同时引入 $\Delta x = R\Delta\lambda, \Delta y = R\Delta\phi, \phi'_j = \cos\phi_j, \phi''_j = \sin\phi_j$; 且取 $\theta = 1$ (当 $k = 1$) 或 0 (当 $k = 2, 3, \dots$)。则平流项可离散化为:

$$\begin{cases} lx_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k}(u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k})}{2\Delta x\phi'_j} + \left(\frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2\Delta y} - \frac{u_{i,j,k}\phi''_j}{R\phi'_j} \right) v_{i,j,k} + lx'_{i,j,k} \\ ly_{i,j,k} = \left(\frac{v_{i+1,j,k} - v_{i-1,j,k}}{2\Delta x\phi'_{j+1/2}} + \frac{u_{i,j,k}\phi''_{j+1/2}}{R\phi'_{j+1/2}} \right) u_{i,j,k} + \frac{v_{i,j,k}(v_{i,j+1,k} - v_{i,j-1,k})}{2\Delta y} + ly'_{i,j,k} \end{cases} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{cases} lx'_{i,j,k} = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(w_{i,j,1} + w_{i+1,j,1} + w_{i,j,2} + w_{i+1,j,2})(u_{i,j,2} - u_{i,j,1})}{\Delta'_{k-1}}, & k = 1 \\ \frac{1}{4} \left[\frac{(w_{i,j,k} + w_{i+1,j,k})(u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})}{\Delta'_{k-1}} + \frac{(w_{i,j,k+1} + w_{i+1,j,k+1})(u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k})}{\Delta'_k} \right] \\ k = 2, \dots, Kx_{i,j} \end{cases} \\ ly'_{i,j,k} = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{(w_{i,j,1} + w_{i,j+1,1} + w_{i,j,2} + w_{i,j+1,2})(v_{i,j,2} - v_{i,j,1})}{\Delta'_{k-1}}, & k = 1 \\ \frac{1}{4} \left[\frac{(w_{i,j,k} + w_{i,j+1,k})(v_{i,j,k} - v_{i,j,k-1})}{\Delta'_{k-1}} + \frac{(w_{i,j,k+1} + w_{i,j+1,k+1})(v_{i,j,k+1} - v_{i,j,k})}{\Delta'_k} \right] \\ k = 2, \dots, Ky_{i,j} \end{cases} \\ \begin{cases} u^*_{i,j,k} = (u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j,k}) / 4 \\ v^*_{i,j,k} = (v_{i,j,k} + v_{i,j-1,k} + v_{i+1,j-1,k} + v_{i+1,j,k}) / 4 \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

$$lx, ly \text{ 的垂直平均值记为: } Lx_{i,j} = \left[\sum_{k=1}^{Kx} (lx_{i,j,k} \Delta_k) \right] / hx_{i,j}, Ly_{i,j} = \left[\sum_{k=1}^{Ky} (ly_{i,j,k} \Delta_k) \right] / hy_{i,j} \quad (15)$$

其中 h_x, h_y 为 u, v 点水深。

在 $U_{i,j}$ 和 $V_{i,j}$ 点, 海底摩擦力由式(10)导出,

$$\begin{cases} Rx_{i,j} = r [u_{i,j,Kx}^2 + (v_{i,j,Kx}^*)^2]^{1/2} u_{i,j,Kx} \\ Ry_{i,j} = r [(u_{i,j,Ky}^*)^2 + v_{i,j,Ky}^2]^{1/2} v_{i,j,Ky} \end{cases} \quad (16)$$

式中, 下标 Kx 和 Ky 均依赖于 (i, j) , 为书写简便未写出。在计算外模态时, 还将用到下列两个量(可理解为垂向平均阻力):

$$Rx'_{i,j} = Rx_{i,j} / (hx_{i,j} + \zeta_{i,j}), \quad Ry'_{i,j} = Ry_{i,j} / (hy_{i,j} + \zeta_{i,j}) \quad (17)$$

在 $\zeta_{i,j}$ 点, 各层 ($k = 1, 2, \dots, M$) 的压强 p^* 值为:

$$\begin{cases} p_{i,j,1}^* = (g\rho_{i,j,1}\Delta_1 / 2 + p') / \rho_0 \\ p_{i,j,k}^* = p_{i,j,k-1}^* + g(\rho_{i,j,k-1}\Delta_{k-1} + \rho_{i,j,k}\Delta_k) / 2\rho_0, \quad k = 2, \dots, M \end{cases} \quad (18)$$

在 $U_{i,j}, V_{i,j}$ 点, 垂向平均斜压压力梯度为:

$$\begin{cases} Px_{i,j} = \left[\sum_{k=1}^{Kx} (p_{i+1,j,k}^* - p_{i,j,k}^*) \Delta_k \right] / (hx_{i,j} \Delta x \phi'_{i,j}) \\ Py_{i,j} = \left[\sum_{k=1}^{Ky} (p_{i,j+1,k}^* - p_{i,j,k}^*) \Delta_k \right] / (hy_{i,j} \Delta y) \end{cases} \quad (19)$$

3.2 外模态差分方程

对 $n = n^* + 1, n^* + 2, \dots, n^* + m$ 用二维方程计算外模态有关变量 ζ, U, V 。在这过程中, 平流项, 底摩擦及浮力项视为不变, 并用 G_x (对 U 点) 和 G_y (对 V 点) 代表它们的联合作用:

$$\begin{cases} Gx_{i,j} = -(Lx_{i,j} + Rx'_{i,j} + Px_{i,j}) \\ Gy_{i,j} = -(Ly_{i,j} + Ry'_{i,j} + Py_{i,j}) \end{cases} \quad (20)$$

计算过程与 Leendertse(1967) 类似。即, 若 n 为偶数, 从 n 到 $n+1$ 步, 对 ζ, U 用隐式计算, V 用显式。 ζ, U 的方程为:

$$\begin{cases} \frac{\zeta_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{Hx_{i,j}^n U_{i,j}^{n+1} - Hx_{i-1,j}^n U_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x \phi'_{i,j}} = \frac{\zeta_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{Hy_{i,j}^n V_{i,j}^n \phi'_{j+1/2} - Hy_{i,j-1}^n V_{i,j-1}^n \phi'_{j-1/2}}{\Delta y \phi'_{i,j}} \\ \frac{U_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{g(\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1})}{\Delta x \phi'_{i,j}} = \frac{U_{i,j}^n}{\Delta t} + Gx_{i,j} + 2\Omega \phi''_{i,j} V_{i,j}^{*n} \\ + \frac{\tau x_{i,j}^{n+1} + \tau x_{i+1,j}^{n+1}}{2Hx_{i,j}^n} + A \delta U_{i,j}^n \end{cases} \quad (21)$$

式中, $Hx_{i,j}^n = hx_{i,j} + (\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i+1,j}^n) / 2$, $Hy_{i,j}^n = hy_{i,j} + (\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j+1}^n) / 2$;

$$\delta U_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta x \phi'_{i,j})^2} + \frac{(U_{i,j+1} - U_{i,j}) \phi'_{j+1/2} - (U_{i,j} - U_{i,j-1}) \phi'_{j-1/2}}{\Delta y^2 \phi'_{i,j}} ;$$

$V_{i,j}^*$ 的意义同 $v_{i,j}^*$ [见式(14)].

式(21)可写成三对角系数矩阵的线性方程组:

$$\begin{cases} A_i U_{i-1,j}^{n+1} + B_i \zeta_{i,j}^{n+1} + C_i U_{i,j}^{n+1} = F_i \\ A'_i \zeta_{i,j}^{n+1} + B'_i U_{i,j}^{n+1} + C'_i \zeta_{i+1,j}^{n+1} = F'_i \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} A_i = -H x_{i-1,j}^n, B_i = \Delta x \phi'_j / \Delta t, C_i = H x_{i,j}^n \\ F_i = B_i \zeta_{i,j}^n - (\Delta x / \Delta y) (H y_{i,j}^n V_{i,j}^n \phi'_{j+1/2} - H y_{i,j-1}^n V_{i,j-1}^n \phi'_{j-1/2}) \\ A'_i = -1, B'_i = \Delta x \phi'_j / (g \Delta t), C'_i = 1 \\ F'_i = \frac{\Delta x \phi'_j}{g} \left(\frac{U_{i,j}^n}{\Delta t} + G x_{i,j} + 2\Omega \phi''_j V_{i,j}^n + \frac{\tau x_{i,j}^{n+1} + \tau x_{i+1,j}^{n+1}}{2H x_{i,j}^n} + A \delta U_{i,j}^n \right) \end{cases} \quad (23)$$

配以适当的侧边界条件,方程组(22)可用追赶法解出.

$$\begin{aligned} V \text{的显式计算公式为: } V_{i,j}^{n+1} = & V_{i,j}^n - (g \Delta t / \Delta y) (\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n) + \Delta t [G y_{i,j} \\ & - 2\Omega \phi''_{j+1/2} U_{i,j}^{n+1} + (\tau y_{i,j}^{n+1} + \tau y_{i,j+1}^{n+1}) / (2 H y_{i,j}^{n+1}) + A \delta V_{i,j}^n] \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\delta V_{i,j}$ 的意义同 $\delta U_{i,j}$.

从 $n+1$ 到 $n+2$ 步, ζ, V 用隐式, U 用显式方法. 与前面类似, ζ, V 的差分方程写作:

$$\begin{cases} A_j V_{i,j-1}^{n+2} + B_j \zeta_{i,j}^{n+2} + C_j V_{i,j}^{n+2} = F_j \\ A'_j \zeta_{i,j}^{n+2} + B'_j V_{i,j}^{n+2} + C'_j \zeta_{i,j+1}^{n+2} = F'_j \end{cases} \quad (25)$$

其中,

$$\begin{cases} A_j = -H y_{i,j-1}^{n+1} \phi'_{j-1/2}, B_j = \Delta y \phi'_j / \Delta t, C_j = H y_{i,j}^{n+1} \phi'_{j+1/2} \\ F_j = B_j \zeta_{i,j}^{n+1} - (\Delta y / \Delta x) (H x_{i,j}^{n+1} U_{i,j}^{n+1} - H x_{i-1,j}^{n+1} U_{i-1,j}^{n+1}) \\ A'_j = -1, B'_j = \Delta y / (g \Delta t), C'_j = 1 \\ F'_j = \frac{\Delta y}{g} \left[\frac{V_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} + G y_{i,j} - 2\Omega \phi''_{j+1/2} U_{i,j}^{n+1} + \frac{\tau y_{i,j}^{n+1} + \tau y_{i,j+1}^{n+1}}{2H y_{i,j}^{n+1}} + A \delta V_{i,j}^{n+1} \right] \end{cases} \quad (26)$$

U^{n+2} 用下列显式公式计算:

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+2} = & U_{i,j}^{n+1} - [g \Delta t / (\Delta x \phi'_j)] (\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}) \\ & + \Delta t \left[G x_{i,j} + 2\Omega \phi''_j V_{i,j}^{n+2} + \frac{\tau x_{i,j}^{n+1} + \tau x_{i+1,j}^{n+1}}{2H x_{i,j}^{n+2}} + A \delta U_{i,j}^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

上面的过程共计算 q 步, 其中 $t = [n^* + (q/2)] \Delta t$ 时刻的 ζ 场和 $t = (n^* + q) \Delta t$ 时刻的 U, V, ζ 场要保留下来用于内模态流场计算(图2). 上述两个时刻也即是内模态计算中的 $t = (m+1/2) \Delta T$ 和 $(m+1) \Delta T$ 时刻.

3.3 三维流场的计算

如前所述,此计算的时间步长为 ΔT (即 $q\Delta t$)。由方程(1)可得第 (i,j) 个 U 点各层 u 的差分方程如下:

$$\begin{cases} B_1 u_{i,j,1}^{m+1} + C_1 u_{i,j,2}^{m+1} & = F_1 \\ A_k u_{i,j,k-1}^{m+1} + B_k u_{i,j,k}^{m+1} + C_k u_{i,j,k+1}^{m+1} & = F_k \quad (k=2, \dots, Kx-1) \\ A_{Kx} u_{i,j,Kx-1}^{m+1} + B_{Kx} u_{i,j,Kx}^{m+1} & = F_{Kx} \end{cases} \quad (28)$$

上式可用追赶法求解。式中,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = -v_2 / [(\Delta_1 + \zeta_{i,j}^{m+1/2})\Delta'_1], B_1 = 1 / \Delta T - C_1, \\ F_1 = F'_1 + \frac{1}{2} (\tau x_{i,j}^{m+1/2} + \tau x_{i+1,j}^{m+1/2}) / (\Delta_1 + \zeta_{i,j}^{m+1/2}), \\ A_k = -v_k / (\Delta_k \Delta'_{k-1}), C_k = -v_{k+1} / (\Delta_k \Delta'_k), \\ B_k = 1 / \Delta T - A_k - C_k, F_k = F'_k \quad (k=2, \dots, Kx-1), \\ A_{Kx} = -v_{Kx} / (\Delta_{Kx} \Delta'_{Kx-1}), B_{Kx} = 1 / \Delta T - A_{Kx}, \\ F_{Kx} = F'_{Kx} - R x_{i,j} / \Delta_{Kx} \\ F'_k = u_{i,j,k}^m / \Delta T - l x_{i,j,k} + 2\Omega \phi''_j v_{i,j,k}^m \\ - [g(\zeta_{i+1,j}^{m+1/2} - \zeta_{i,j}^{m+1/2}) + (p_{i+1,j,k}^* - p_{i,j,k}^*)] / (\Delta x \phi'_j) + A \delta u_{i,j,k}^m \end{array} \right.$$

关于 $v_{i,j,k}$ 的差分方程类似,这里不具体列出。在上面计算中对Coriolis项用的是向前差分。这会使惯性流随时间增大,在摩擦消耗较小时(深海中常如此)会导致计算值的不断增长。为此在计算完 v^{m+1} 场后,可对 u^{m+1} 用预估-校正法重新算一次,其计算公式仍用(28),仅其中 F_k 用订正后的 F_k^* 代替:

$$F_k^* = F_k + 2\Omega \phi''_j (v_{i,j,k}^{m+1} - v_{i,j,k}^m) \quad (29)$$

最后,对三维计算所得到的 u 和 v 进行调整,用 u_* 和 v_* 代替 u 和 v ,使与二维结果相容。方法是,对每个第 (i,j) 个 U 和 V 点, $u_*^{m+1} = u^{m+1} + \Delta u$, $v_*^{m+1} = v^{m+1} + \Delta v$ 。其中 u, v 均与 (i,j,k) 有关,且:

$$\begin{cases} \Delta u = U - \frac{1}{H x_{i,j}} \sum_{k=1}^{Kx} \{[\Delta_k + \theta_k(\zeta_{i,j} + \zeta_{i+1,j}) / 2] u_{i,j,k}^{m+1}\} \\ \Delta v = V - \frac{1}{H y_{i,j}} \sum_{k=1}^{Ky} \{[\Delta_k + \theta_k(\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j+1}) / 2] v_{i,j,k}^{m+1}\} \end{cases}$$

这里, U, V, ζ 为 $(m+1)\Delta T$ 时刻对应的二维计算结果(即 $n^* + q$ 步结果,图2)。

算出 u, v 后再用连续方程计算 w (其中 u, v 为调整后值):

$$w_{i,j,M+1}^{m+1} = 0$$

$$w_{i,j,k}^{m+1} = w_{i,j,k+1}^{m+1} + \frac{\Delta_k + \theta_k \zeta_{i,j}}{\phi'_j} \left(\frac{u_{i,j,k}^{m+1} - u_{i-1,j,k}^{m+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j,k}^{m+1} \phi'_{j+1/2} - v_{i,j-1,k}^{m+1} \phi'_{j-1/2}}{\Delta y} \right)$$

$$k = M, M-1, \dots, 1$$

4 结语

本研究提出的计算过程可以独立地用于研究正压动力过程,如潮汐、风暴潮和正压海流的数值建模等,也可用于斜压环流的诊断计算。如果想模拟斜压环流的演化过程,则应与本文 II 中关于温、盐度的数值计算结合起来。

本模式中模态的计算采用了交替方向隐格式,其时间步长不受波动方程 CFL 条件的限制。但是由于时间劈分带来的误差,实际计算时 Δt 应不大于 CFL 条件的 10 倍,即取 $\Delta t \leq 10 \{gh_{\max} [(\Delta x \cos \phi)^{-2} + \Delta y^{-2}] \}^{-1/2}$, 式中 h_{\max} 为海区最大水深。由于本模式中平流项采用了向前差分,内模态时间步长应受平流 CFL 条件限制,即要求

$\Delta T \leq \{[|u|(\Delta x \cos \phi)^{-1} + |v|\Delta y^{-1} + |w|\Delta^{-1}]_{\max}\}^{-1}$ 。由于 u, v, w 是计算得出的,事先只能作出一个大概估计,上式可作为一个指导性的公式使用。

致谢 计算、绘图和打字工作得到魏泽勋、王新怡和杜涛的协助,谨志谢忱。

参 考 文 献

- Backhaus O, 1985. A three-dimensional model for the simulation of shelf sea dynamics. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 38(4):165—187
- Fang G H, Ichiye T, 1983. On the vertical structure of tidal currents in a homogeneous sea. *Geophys. J R Astr Soc*, 73: 65—82
- Leendertse J J, 1967. *Aspects of a Computational Model for Long-period Water-Wave Propagation*. Santa Monica: RM-5294-PR, Rand Corp. 165pp.
- Leendertse J J, Liu S K, 1977. A three-dimensional turbulent energy model for nonhomogeneous estuaries and coastal sea system. *In Hydrodynamics of Estuaries and Fjord* (Ed. J C J Nihoul). Elsevier, Amsterdam. 387—405.
- Mellor G L, 1993. *User's Guide for a Three-Dimensional, Primitive Equation Numerical Ocean Model*. Princeton: Princeton University. 35pp.

A THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL MODEL FOR BAROCLINIC OCEAN DYNAMICS

I. NUMERICAL SCHEME FOR HYDRODYNAMIC EQUATIONS

FANG Guo-hong, YU Ke-jun

(*Institute of Oceanology, The Chinese Academy of Sciences, Qingdao, 266071*)

Abstract This 3-D numerical model based on the primitive equations of ocean dynamics can be applied for numerical simulation and prediction of tides, storm surges and currents in a baroclinic ocean. The numerical scheme (described in Part I of this paper) for solving the equations of motion and continuity uses the internal-external mode splitting technique. The alternating direction implicit scheme is employed for the external mode computations which give the surface heights and depth-mean currents. The time step is thus not restricted by the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition for wave propagation. A semi-implicit scheme is used for the internal mode computations which give the vertical structure of the currents. But the time step is restricted by the CFL condition for advection and can be significantly longer than that of the external mode computation. As a consequence, the overall computational speed can be 10 times that of the general explicit models.

The Arakawa C-grid is adopted in the present model. In the horizontal, the spheric coordinate is adopted to facilitate large area computations. In the vertical, the grid levels are consistent with the z -coordinate. The topography is represented by a stepwise bottom. The superiority of using the z -coordinate instead of the sigma-coordinate in the vertical discretization is that it can avoid the instability in the region of steep topography and the excessive artificial diffusivity across isopycnal surfaces induced by the layout of grid points in line with the sigma-coordinate.

The computations of the external and internal modes are coupled with each other. The external mode computations are performed with a time step generally shorter than 10 times the CFL condition for wave propagation and the internal mode computations are performed with a time step shorter than the CFL condition for advection. The latter is generally longer than the former. In the external mode computations, the advection and bottom friction terms are calculated based on the internal mode results and thus the errors existing in the corresponding terms of the 2-D equations can be removed. To retain the consistency between external mode and internal mode results, the computed depth-averaged velocities of the internal mode are adjusted to be equal to the velocities of the external mode. This implies that internal mode computations only specify the vertical variations of the velocity.

Key words Three dimension Baroclinic model Numerical ocean model Free surface

Subject classification number P731