

层化流体中半板造波的内波解*

王日新 沈国光 李德筠 徐肇庭[†]

(天津大学海洋与船舶工程系 天津 300072)

[†](青岛海洋大学物理海洋研究所 青岛 266003)

提要 为了形象地说明内波的传播模式,研究给出了内波水槽中由半板造波所形成的内波解。结合 Väisälä 频率 $N(z) = \text{const}$ 和简化 Holmboe 两种密度剖面模式讨论了内波场的传播图案。在内波水槽中成功地形成了上述两种密度剖面,相应的实验印证了本文分析的正确性。

关键词 分层流体 内波 造波

学科分类号 P731

在内波水槽中进行试验是研究内波的重要手段。为模拟奇数模态内波,一般用单板(或称全板)造波机生成这种内波。Thorpe(1968)提出了单板造波机的解析解,徐肇庭等(1989)给出了偶板造波机的解析解,并进行了相应的实验检验,其理论分析和试验结果(Koop *et al*, 1986)都表明内波在垂向是驻波形式,而不能显现内波在垂直方向的传播运动特性。基于以上原因,作者提出用半板造波机生成在垂向具有传播特性内波的设想。本文研究了半板造波解的分析求解过程并对有关内波特性进行了讨论。

1 控制方程及其求解

在内波研究中为简化处理,设压力场和密度场为

$$\bar{p} = p_0(z) + p \quad \bar{\rho} = \rho_0(z) + \rho \quad (1)$$

$p_0(z)$ 、 $\rho_0(z)$ 为平衡状态下的流场静压力、密度值; p 、 ρ 为对应量的内波扰动项。在小扰动 $p \ll p_0$ 、 $\rho \ll \rho_0$ 和随体导数 $d\bar{\rho}/dt = 0$ (Boussinesq 假定)条件下,从 Euler 方程出发经线性化处理并引入流函数 ψ 后可得二维内波控制方程(富永英政,1976)¹⁾

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\nabla^2 \psi - \frac{N^2}{g} \psi_z \right) + N^2 \psi_{xx} = 0 \quad (2)$$

式中, $N^2 = -g/\rho_0(z) \cdot d\rho_0/dz$, N 为 Väisälä 频率。流函数与速度分量的关系: $u = \psi_z$; $w = -\psi_x$, u , w 分别为 x , z 方向的速度分量。若取:

$$\psi = 1/\sqrt{\rho_0} \cdot X(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (3)$$

式中, ω , k 分别为扰动频率和 x 向的波数。在 N 为小量前提下, $X(z)$ 应满足方程:

* 国家自然科学基金资助项目,49776284号。王日新,男,出生于1964年12月,博士,讲师, Fax: 0086-022-23358329

1) 富永英政,1976。海洋波動-基礎理論と観測結果。共立出版社

收稿日期:1997-03-10,收修改稿日期:1997-08-10

$$d^2 X/dz^2 + k^2(N^2/\omega^2 - 1)X = 0 \quad (4)$$

和边界条件:

$$z = 0 \quad \omega^2 dX/dz - gk^2 X = 0 \quad (5)$$

$$z = -D \quad X = 0 \quad (6)$$

在自由面 $z = 0$ 附近方程 (4) 的解 $X(z) \propto \exp[i(N^2(0)/\omega^2 - 1)^{1/2} kz]$, 由式 (5) 可知, 只要 $\omega^2/gk \cdot |N^2(0)/\omega^2 - 1| \ll 1$, 即 $\omega^2 \ll gk$, 或 $N(0) \approx \omega$ 则条件 (5) 可用 $X = 0$ 近似, 在内波研究中它被称为“刚盖”条件, 在一般情况下它都能被满足。

设造波机置于 $x = 0$ 处, 对于全单板造波机, 在摇板运动微幅的前提下, 板面上的条件可写为:

$$u = A\omega(1 + 2z/D)\sin\omega t \quad x = 0, \quad -D < z < 0 \quad (7)$$

式中, A 为最大振幅。为满足方程和 $z = 0, -D$ 边界条件, 可取内波解的形式为

$$\psi = \sum A_n \sin(l_n z) \sin(k_n x - \omega t) \quad (8)$$

式中, $l_n = \sqrt{N^2/\omega^2 - 1} \cdot k_n$ 为垂向波数; A_n 可由摇板板面条件定出 $A_n = -1/Dl_n \int_{-D}^0 A\omega \times (1 + 2z/D)\cos(l_n z) dz$, n 表征模态数, 当 $n = 1$ 时 $l_1 = \pi/D$, 在 $z = -D/2$ 处波幅最大。利用三角公式将 (8) 式写成

$$\psi = \sum 0.5A_n [-\cos(l_n z + k_n x - \omega t) + \cos(l_n z - k_n x + \omega t)] \quad (9)$$

式 (9) 代表内波解由波向 $z = \pm k_n/l_n \cdot x$ 的向右上、下行的两波系合成。

对于半单板造波, 板面条件只在上 (或下) 半部满足, 即在造波机位置 $x = 0$ 及 $z = (-D, -D/2)$ 或 $(-D/2, 0)$ 间不存在扰动解。

本文讨论涉及如下 4 种密度剖面。

$$(i) \quad N = \text{常数} \quad \rho_0(z) = \bar{\rho}_0 e^{-\alpha z} \quad N^2 = \alpha g \quad (10)$$

$$(ii) \quad \text{Holmboe 分布} \quad \rho_0(z) = \bar{\rho}_0 e^{-\alpha \tanh \frac{(z-z_0)}{h}} \quad N^2 = \frac{\alpha g}{h} \operatorname{sech}^2 \frac{(z-z_0)}{h} \quad (11)$$

$$(iii) \quad \text{线性分布} \quad \rho_0(z) = \rho_1 + (\rho_1 - \rho_2)z/D \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0(z)} \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{D} \quad (12)$$

(iv) 简化 Holmboe 分布

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_1 & 0 > z > -h_1 \\ \rho_1 + (\rho_1 - \rho_2)(z + h_1)/(D - h_1 - h_2) & -h_1 > z > -(D - h_2) \\ \rho_2 & -(D - h_2) > z > -D \end{cases} \quad (13)$$

图 1cd 两种剖面是图 1a、b 剖面模式的简化替代。此时可设解形为

$$X(z) = R(z)e^{i\beta(z)} \quad (14)$$

$R(z)$ 为垂向振型的模, 因模态对应于上式右端的实部, $\pm \beta(z)$ 都是解, 由 (3) 有:

$$\psi = 1/\sqrt{\rho_0} \cdot R(z)e^{i(\pm \beta(z) + kx - \omega t)} \quad (15)$$

$$\text{此时波动的总相位:} \quad \theta = \pm \beta(z) + kx - \omega t \quad (16)$$

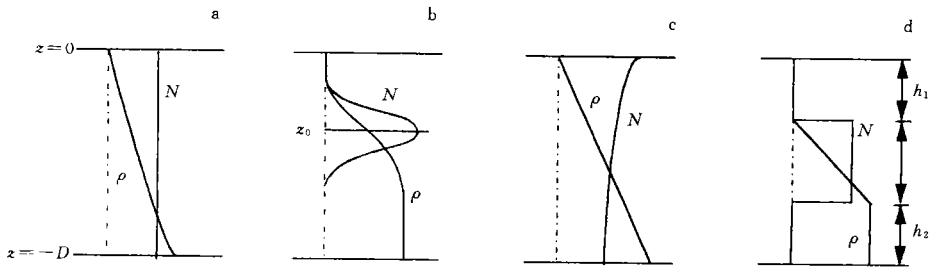


图 1 几种密度剖面模式

Fig.1 Some modes of density profiles

a. 模式 (i); b. 模式 (ii); c. 模式 (iii); d. 模式 (iv)

z, D, h_1, h_2 分别为垂向坐标、水深和 holmboe 剖面的上下两层等密度层厚度

2 内波特性

2.1 速度和波场

先讨论密度模式 (i) 由半板造波所产生的内波场, 由解 (8) 可得流场速度

$$\begin{aligned}
 u &= \psi_z = A_1 l_1 \cos l_1 z \cdot \sin(k_1 x - \omega t) \\
 &= 0.5 A_1 l_1 [\sin(l_1 z + k_1 x - \omega t) + \sin(l_1 z - k_1 x + \omega t)] \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w &= -\psi_x = A_1 k_1 \sin l_1 z \cos(k_1 x - \omega t) \\
 &= 0.5 A_1 k_1 [\sin(l_1 z + k_1 x - \omega t) - \sin(l_1 z - k_1 x + \omega t)] \tag{18}
 \end{aligned}$$

利用 $x = 0$ 处的板面条件可得出: $A_1 = 2/D l_1 \cdot \int_{D/2}^0 A \omega (1 + 2z/D) \cos l_1 z dz$.

与全板造波不同之处在于此时只有在上 (或下) 半板上产生扰动波。依射线理论概念, 从板面上每点可发出向右上、下两条射线。以密度分布最简单的分布模式 (i) 为例, 当 $N > \omega$ 时其波场形象如图 2a 所示。从 C 点发出的两条射线为 CB, CG, 而 CP, CQ 是与其垂直的两等相线。对于向右下方传播的波系 A 与 B 和 A 与 C 点之间的相位差均为 $\pi/2$, 与 CP 平行的线 LB, GM 均是向右下行射线族的等相线。在区域 CBF 中扰动波向右下行进; 在区域 FKJI 中扰动波向右上行进。在三角形 GFI 中则同时存在两个波系, 由于过其上每点的射线斜率反号, 故合成后的波向只会沿水平方向, 而在三角形 BKF 中无扰动波。如果取垂直断面 pqst, 可得出如下结论: 在 pq 段波向水平, 合成位相相同; 在 qs 段波向右上, 每点位相不同; 在 st 段上则无波。

对于全板造波, 则在图 2a 所示范围内充满两个波系, 处处与上面讨论的三角形 GFI 区域情况相同, 垂向为驻波, 只存在水平方向传播的波。

简化的 Holmboe 密度分布模式具有 Holmboe 模式的基本特征, 即上下两端的密度为常数, 中间为过渡区。对选定的扰动频率, Väisälä 频率分布可存在 $N(z)$ 大于和小于 ω 的三个区域 (沈国光等, 1996)。在中间 $N(z) > \omega$ 区域内

$$\begin{aligned}
 \psi &= 1/\sqrt{\rho_0(z)} \cdot X(z) e^{i(kx - \omega t)} = 1/\sqrt{\rho_0(z)} \cdot R(z) e^{i(\beta(z) + kx - \omega t)} \\
 &= 1/\sqrt{\rho_0(z)} \cdot R(z) e^{i(\pm lz + kx - \omega t)} \tag{19}
 \end{aligned}$$

可定义位相 $\theta_{1,2} = \pm lz + kx - \omega t$, $l(z) = \sqrt{N^2(z)/\omega^2 - 1} \cdot k$, 等相线:

$$x = \pm \sqrt{N^2(z)/\omega^2 - 1} \cdot z + \omega/k \cdot t + x_p \tag{20}$$

射线与等相线垂直：

$$x = \pm z/\sqrt{N^2/\omega^2 - 1} + x_R \tag{21}$$

由于在 $N(z) = \omega$ 处射线方向水平，内波将在 $N(z) = \omega$ 的两个层面间振荡。在波动理论中称 $N(z) = \omega$ 的线为焦点线，相应于简化的 Holmboe 密度剖面的内波图象如图 2b 所示。

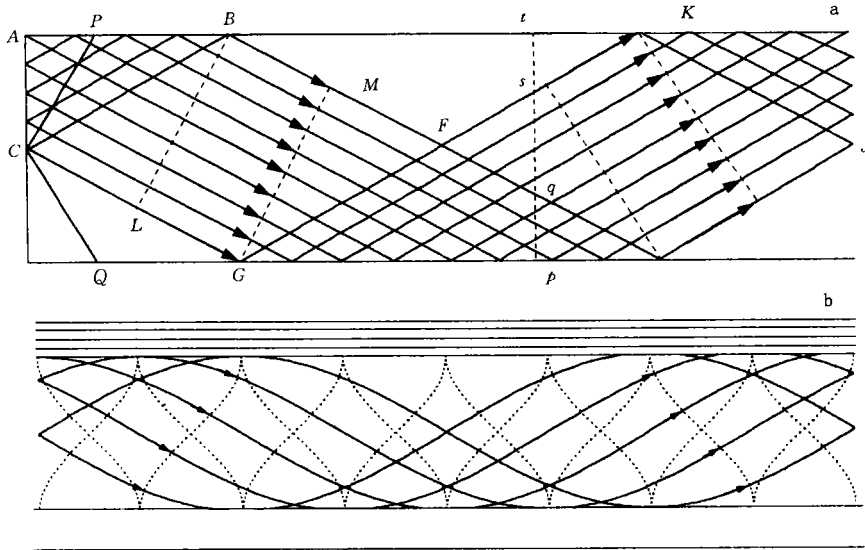


图2 半板造波的波场

Fig.2 Wave field formed by a semi-plate wave maker
 a. 密度模式 (i); b. 密度模式 (iv)

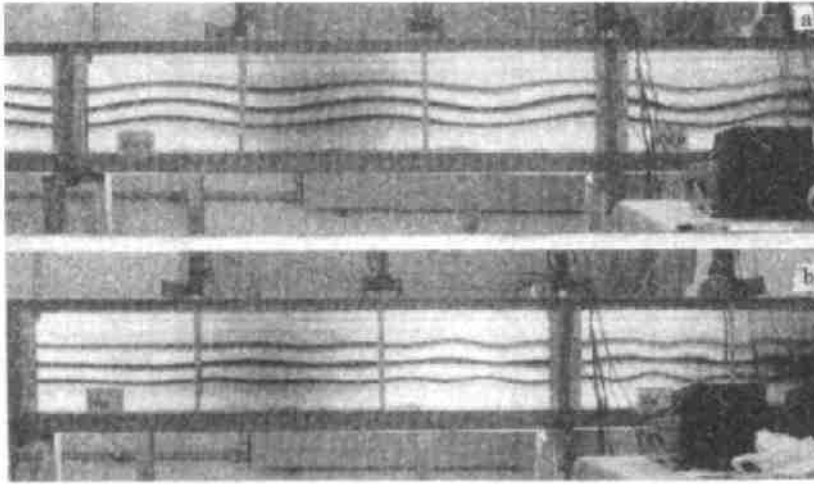
在 $N(z) < \omega$ 的区域, $\beta(z) = (n + 1/2)\pi$ 。依式 (15) 等所定义的物理量只对应于复数表示的实部, 故此时的位相与 z 无关, 只依赖于 x , 其波动只沿水平方向传播。

2.2 试验印证

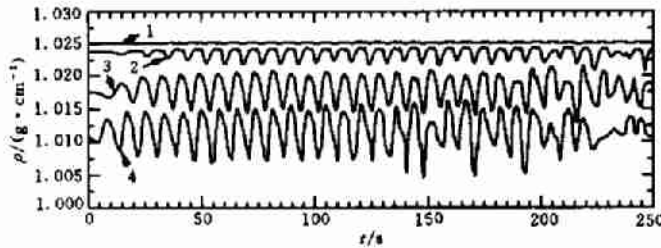
有关的内波试验在青岛海洋大学物理海洋实验室中完成。图 3a、b 提供的是相应于全板和半板造波时的两幅实验照片。其密度分布为图 1 中的 (iv) 型, $\rho_1 = 996.0\text{kg/m}^3$, $\rho_2 = 1\ 025.0\text{kg/m}^3$, $h_1 = h_2 = 6\text{cm}$, $D = 24\text{cm}$ 。由于分子扩散效应, 理论上图示的密度分布导数—— $V\ddot{a}is\ddot{a}l\ddot{a}$ 频率的间断不会存在, 实际上出现的是很稳定的连续曲线。图 3a 是全板造波的结果, 着色线所标示的等密度线充分显示了内波的形象。图 3b 是采用将全单板造波机的摇板上半部用薄板挡住的方法以形成半板造波时所拍下的内波照片, 此时在垂向内波位相变化已非常明显。图 4 是在距造波机不同距离 x 和从底算起在不同高程 z 处由电导率仪所测得的密度时历过程。利用实验时的标定数据经换算后可得内波流体质点振荡的幅值, 显见在中心区波幅值最大。

2.3 质点轨迹

如果采用解 (8), 则由速度分量的计算式 (17)、(18) 可计算流体质点轨迹。在微幅前

图3 内波试验照片 ($t=8.52s$)Fig.3 Internal wave experiment photo ($t=8.52s$)

a. 全板造波; b. 半板造波

图4 电导率测头的时历记录 ($t=8.24s$)Fig.4 Time-series of the conductometers readings ($t=8.24s$)

1—4 探头位置: 1 $x=212cm$ $z=-4cm$; 2 $x=162cm$ $z=-7cm$;
3 $x=112cm$ $z=-10cm$; 4 $x=62cm$ $z=-13cm$

提下,可用平衡点 (x_0, z_0) 处的 u, w 进行积分,得

$$x - x_0 = A_1 l_1 / \omega \cdot \cos(l_1 z) \cos(k_1 x - \omega t) = a \cos(k_1 x - \omega t)$$

$$z - z_0 = -A_1 k_1 / \omega \cdot \sin(l_1 z) \sin(k_1 x - \omega t) = -b \sin(k_1 x - \omega t)$$

可见质点轨迹为椭圆,当 $l_1 z = 0, \pi$ 时短轴 $b = 0$,长轴 $a = l_1 A_1 / \omega$,而当 $l_1 z = \pi/2$ 时 $a = 0, b = k_1 A_1 / \omega$.

如果取解(9)中 $\theta = l_1 z - k_1 x + \omega t$ 的一支,则积分后

$$x - x_0 = 1/2 \cdot A_1 l_1 / \omega \cdot \cos \theta$$

$$z - z_0 = -1/2 \cdot A_1 k_1 / \omega \cdot \cos \theta$$

此时, $(z - z_0) / (x - x_0) = -k_1 / l_1 = 1 / \sqrt{N^2 / \omega^2 - 1}$, 流体质点轨迹为直线, N / ω 大时坡度小, N 接近于 ω 时坡度大。应当注意的是上述结论只适用于如图 2a 上的 CBF 平行四边形区域,至于三角形 GFI 或 BFI 区域则要么同时存在两个波系,要么无波。在 $z = 0, -D$ 处应另加考虑。

对于层化流场的一般情况取解 (19), 则有:

$$u = \psi_z = (-1/2 \cdot N^2/\sqrt{\rho_0} \cdot R/g + 1/\sqrt{\rho_0} \cdot dR/dz) \cos\theta - 1/\sqrt{\rho_0} \cdot R \cdot d\beta/dz \cdot \sin\theta$$

$$w = -\psi_x = -1/\sqrt{\rho_0} \cdot kR \sin\theta \quad \theta = \beta(z) + kx - \omega t$$

继而可得:

$$x - x_0 = a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta \quad (22)$$

$$x - z_0 = b \cos\theta \quad (23)$$

式中, $\theta = \beta(z_0) + kx_0 - \omega t$; $b = -1/\omega \cdot k/\sqrt{\rho_0} \cdot R_0$

$$a_1 = \frac{1}{\omega} (-1/2 \cdot N^2/\sqrt{\rho_0} \cdot R/g + 1/\sqrt{\rho_0} \cdot dR/dz); \quad a_2 = -1/\omega \cdot R/\sqrt{\rho_0} \cdot d\beta/dz$$

式(22), (23)仍可化成为一二次曲线。一般来说, 虽不是椭圆, 但仍为一封闭曲线。不妨仍称 a_1 、 b 为长短轴。对 $\beta(z) = \pm \sqrt{N^2/\omega^2 - 1} \cdot kz$, $l_1 = \sqrt{N^2/\omega^2 - 1} \cdot k = \pi/D$, $R(z) = \text{const}$ 情况, $a_1/b = N^2/2gk$, 可见仍是 N 大时流体质点水平方向运动大于垂向, 与前面 $N(z) = \text{const}$ 时的结论一致。

3 结语

- 3.1 在线化理论上给出的半板造波解可清晰地说明内波的传播模式和基本特征。
- 3.2 本文对 Väisälä 频率 $N(z)$ 为常数及密度、 $N(z)$ 为一般情况的波场进行了理论分析。
- 3.3 关于压力场特性的讨论将会对内波载荷的分析计算大有裨益。
- 3.4 在青岛海洋大学物理海洋实验室的内波水槽中成功地形成了简化 Holmboe 密度剖面, 其全单板和半板造波的波场照片有力地印证了本文分析的正确性。

参 考 文 献

- 沈国光, 李德筠, 1996. 内波研究中的射线理论和陷波. 水动力学研究与进展, A 辑, 11(1): 43—51
- 徐肇庭, 方欣华, 汪一明, 1989. 偶板造波机生成的内波振幅-理论与实验的比较. 水动力学研究与进展, A 辑, 4(4): 89—95
- Koop C G, McGee B, 1986. Measurements of internal gravity waves in a continuously stratified shear flow. J Fluid Mech, 172:453—482
- Thorpe S A, 1968. On the shape of progressive internal wave. Phil Trans of Roy Soc London, 263: 563—614

SOLUTION OF INTERNAL WAVE GENERATED BY SEMI-PLATE WAVE MAKER IN STRATIFIED FLUID

WANG Ri-xin, SHEN Guo-guang, LI De-jun, XU Zhao-ting[†]

(*Department of Ocean Engineering & Naval Architecture, Tianjin University, Tianjin, 300072*)

[†](*Institute of Physical Oceanography, Ocean University of Qingdao, Qingdao, 266003*)

Abstract In order to illustrate the propagation mode of internal wave, a solution of internal wave generated by a semi-plate wave maker in water channel is presented in this paper. The internal wave field image for two density modes profile with Väisälä frequency $N(z) = \text{const}$ and simplified Holmboe distribution is discussed. The particle path and pressure distribution of fluid are analyzed. Both of density modes profile above mentioned has been formed successfully in the internal wave water channel of the Physical Oceanography Laboratory of Ocean University of Qingdao. The relevant experiments clearly confirm the analyses in this paper. The photo of internal wave field generated by semi-plate wave maker shows the internal wave is out of phase along vertical direction, which differs with that is in phase generated by the whole plate wave maker.

Key words Stratified fluid Internal wave Wave maker

Subject classification number P731