第 30 卷 第 6 期 1999 年 11 月
海 洋 与 湖 沼
OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA
Vol.30 No.6 Nov, 1999

赤道海洋波致 Lagrange 余流的弱非线性动力学模型及其解*

王 凡
(中国科学院海洋研究所 青岛 266071)

吴德星 冯士筰 侍茂崇
(青岛海洋大学海洋环境学院 青岛 266003)

提要 基于一个连续层化赤道海洋波动的弱非线性动力学系统，推导并建立了由最低阶 Lagrange 余流体现的包含波致、风生等效应在内的热带海洋余环流基本方程组。经分析发现，零阶赤道波动自身的非线性耦合可产生一阶余流，其量级对于热带上层海洋准定常环流而言是不可忽略的。波致环流的产生紧密联系于 Lagrange 轨迹运动与波流场的非线性耦合效应。所导出的最低阶赤道波致 Lagrange 余流的一般解具有与零阶波动不同的垂直与经向结构。从而表明，在赤道波运动占优势的连续层化海洋中，环流的产生机制，除了惯常认为的海面风应力和热盐强迫力外，波周期运动也可产生定常环流。

关键词 赤道海洋波动 弱非线性动力学模型 波致 Lagrange 余流 非线性耦合 海洋环流

学科分类号 P731.2

赤道波导中显著存在的海洋波动是热带海洋中经久不息的运动形式之一，它所引起的振荡性流场是热带海洋中与由赤道流系所构成的准定常环流同样突出的动力学特征。同时，赤道海洋波动与 ENSO 循环中赤道中、东太平洋环流和 *SST* 的年际变化之间存在着较为密切的关系。观测研究结果显示，在赤道中、东太平洋，由海洋波动所产生的动量、热量通量对海洋上混合层产生的纬向动力强迫和经向加热量分别与驱动热带海洋准定常环流的气候平均风应力和热带海洋的气候平均外部加热量相当(Hansen *et al*, 1984; Bryden *et al*, 1989; Luther *et al*, 1990)。这意味着赤道海洋波动对气候平均热带海洋环流及水温分布与变化有显著的贡献作用。显然，起这种作用的不是波流速振荡部分，而是对其进行时间平均后的剩余部分——余环流。因此，研究赤道波致余流及其对海洋环流和 *SST* 变化的贡献作用，无论是对赤道海洋环流动力学本身还是对研究热带海洋在气候变化中的作用，都具有重要的科学意义和理论价值。

已有许多海洋波动对海洋环流及热量输运贡献作用的研究工作(Hansen *et al*, 1984; Bryden *et al*, 1989; Luther *et al*, 1990; Hebert *et al*, 1991; Thompson *et al*, 1993; Graef *et al*, 1994)，其中大多限于资料分析并且以 Euler 余流作为海洋环流的体现。但是，

* 国家自然科学基金资助项目，49576276号．王 凡，男，出生于1967年1月，博士，研究员，Email: goalis@ms.qdio.ac.cn

收稿日期：1997-08-26，收修改稿日期：1998-04-08

必须指出，由于与动量、热量和质量等输运过程联系在一起，余环流及其对流输运主要并不取决于Euler余流，因而不能完全体现于Euler余流，而是依赖于流体微团随体速度的平均，即所谓Lagrange平均速度(Longuet-Higgins, 1969; Zimmerman, 1979; Cheng *et al*, 1982; Feng *et al*, 1986)。特别是，在连续层化条件下赤道海洋波动受制于一个弱非线性系统(王凡等，1998)。在该类弱非线性系统中，上述两种平均方法得到的余流已被从理论上证明确有差异(冯士筰，1988)；亦可证明后者在最低阶意义上构成不可压缩流场(因而可称之为Lagrange余流)，并且满足前者所不满足的环流场中的物质面守恒方程。因此以Lagrange余流描述和确定与波动相关联的海洋环流及其输运过程更为合理。在Lagrange平均概念基础上，发展研究热带海洋波致环流和物质长期输运过程的动力学理论是至关重要的，也是必要的。

在Lagrange平均概念基础上，研究海洋中振荡性运动所产生的环流和相应的物质长期输运过程的历史并不长，其中主要在浅海潮致余流方面有较大发展(冯士筰，1992)，在大洋环流方面工作较少(Longuet-Higgins, 1969; Moore, 1970; Thompson *et al*, 1993)，而针对热带上层海洋的研究迄今未见报道。

近来，连续层化赤道海洋波动的弱非线性动力学系统框架已被初步建立(王凡等，1998)。本研究将在该动力学框架上，构造出由最低阶Lagrange余流体现的热带海洋波致余环流基本方程组，从而为赤道波致余流研究奠定理论基础。进而，导出最低阶赤道波致Lagrange余流的一般表达式并初步探讨其动力学性质。

1 连续层化赤道海洋波动的弱非线性动力学模型

借助于对运动的特征尺度及物理量的尺度分析，连续层化赤道海洋波运动的非线性热力-动力学系统可表述为(王凡等，1998)

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \vec{u} = 0 \\
&u_t + \varepsilon(\vec{u} \cdot \nabla u) - yv + p_x = (\gamma u_z)_z \\
&v_t + \varepsilon(\vec{u} \cdot \nabla v) + yu + p_y = (\gamma v_z)_z \\
&p_z = -\rho \\
&\rho_t + \varepsilon(\vec{u} \cdot \nabla \rho) + w\rho_{Bz} = (\kappa\rho_z)_z
\end{aligned}
\tag{1}
$$

边界条件：$z = 0,\ \gamma u_z = \tau^x,\ \gamma v_z = \tau^y,\ \kappa\rho_z = q, w = 0$

$z = -D,\ \gamma u_z = \gamma v_z = 0,\ \rho = 0,\ w = 0$

式中，u、v、w分别是纬向、经向和垂向流速；p为海水压强；γ、κ分别为湍粘性和湍扩散系数；τ^x、τ^y、q分别为海表面纬向、经向风应力强迫和浮力强迫。需特别说明的是：ρ_B为背景层化密度，ρ为运动引起的密度扰动；ε是波场中流速与波相速之比的测度和扰动密度与背景层化密度铅垂向变化之比的测度。观测数据显示，对于主要由第一、二斜压模态组成的赤道波而言，ε约为0.2—0.3，故为一弱非线性系统(王凡等，1998)。按ε将各变量作如下摄动展开

$$a = a^0 + \varepsilon a^1 + \varepsilon^2 a^2 + o(\varepsilon^3) \tag{2}$$

式中，a、a^n分别代表所有变量及其n阶模型的解。

摄动展开后得到方程组(1)的有因次零阶模型：

$$\nabla \cdot \vec{u}^0 = 0$$

$$
\begin{aligned}
& u_t^0 - \beta y v^0 + \frac{1}{\rho_0} p_x^0 = (\gamma u_z^0)_z \\
& v_t^0 + \beta y u^0 + \frac{1}{\rho_0} p_y^0 = (\gamma v_z^0)_z \\
& p_z^0 = -\rho^0 g \\
& \rho_t^0 - \rho_0 \frac{N_B^2}{g} w^0 = (\kappa \rho_z^0)_z
\end{aligned}
\tag{3}
$$

边界条件　$z = 0,\ \gamma u_z^0 = \tau^x,\ \gamma v_z^0 = \tau^y,\ \kappa \rho_z^0 = q,\ w^0 = 0$

$z = -D,\ \gamma u_z^0 = \gamma v_z^0 = 0,\ \rho^0 = 0,\ w^0 = 0$

一阶模型

$$
\begin{aligned}
& \nabla \cdot \vec{u}^1 = 0 \\
& u_t^1 - \beta y v^1 + \frac{1}{\rho_0} p_x^1 = F_u^1 + (\gamma u_z^1)_z \\
& v_t^1 + \beta y u^1 + \frac{1}{\rho_0} p_y^1 = F_v^1 + (\gamma v_z^1)_z \\
& p_z^1 = -\rho^1 g \\
& \rho_t^1 - \rho_0 \frac{N_B^2}{g} w^1 = F_\rho^1 + (\kappa \rho_z^1)_z
\end{aligned}
\tag{4}
$$

边界条件　$z = 0,\ \gamma u_z^1 = 0,\ \gamma v_z^1 = 0,\ \kappa \rho_z^1 = 0,\ w^1 = 0$

$z = -D,\ \gamma u_z^1 = \gamma v_z^1 = 0,\ \rho^1 = 0,\ w^1 = 0$

式中，$F_u^1 = -\vec{u}^0 \cdot \nabla u^0,\ F_v^1 = -\vec{u}^0 \cdot \nabla v^0,\ F_\rho^1 = -\vec{u}^0 \cdot \nabla \rho^0;\ N_B = \left(-\frac{g}{\rho_0}\rho_{Bz}\right)^{1/2}$为Brunt–Väisälä频率(浮力频率)。

零阶模型事实上构成了线性赤道波动力学定解问题，方程组(3)即现有的赤道响应和赤道陷波线性模型的原始控制方程组；一阶模型的强迫项是由零阶模型的对流非线性项组成的，包含了零阶波动引起的流场变化及其与密度场变化之间的非线性效应。零阶波动自身的非线性耦合将同时产生2倍于原频率的一阶波动和余流。

2　波致 Lagrange 余流概念和基本方程组

以t_0时刻由$\vec{x}_0$处释放的标识流体微团随体速度的波周期平均定义Lagrange平均速度，亦即

$$
\vec{u}_{LM} = \langle \vec{u}(\vec{x}_0 + \vec{\xi}(t), t) \rangle \tag{5}
$$

式中，$\langle\rangle = \frac{1}{nT}\int_{t_0}^{t_0+nT} \mathrm{d}t$为波周期平均算子；$\vec{\xi} = (\xi,\ \eta,\ \zeta)$表示标识微团的位移；$T$和$n$分别是波周期及其个数。

为了能使Lagrange平均速度构成大时间尺度环流问题中的不可压缩流速场，并定义为Lagrange余流，这里借鉴浅海潮致余流的研究方法，要求用以平均的时段nT既足够长以滤掉波振荡，又足够短使得该标识微团在经过n个波周期后的位移尺度ξ_0与经过一个波周期后的位移尺度之比N满足$\mathrm{O}(N) = 1$(冯士筰，1988)。这等价于假设$\mathrm{O}(n) < \varepsilon^{-2}$，即

限制了标识流体微团被释放后经历的时间长度 nT。例如，取ε为 10^{-1}，则标识流体微团经历的时间长度应小于100个波周期。如果研究对象具有几天或几十天波周期，则所讨论的问题不能超过年际或年代际时间平均问题。在此条件下，将流体微团的随体速度在 $\vec{x}_0$处的Tayler展式连同摄动展式(2)带入式(5)，可得各阶Lagrange平均速度表达式，其中最低阶Lagrange余流 $\vec{u}_L$由两部分组成，即

$$\vec{u}_L = \vec{u}_E + \vec{u}_S \tag{6}$$

其中，$\vec{u}_E = \langle \vec{u}^1(\vec{x}_0,t) \rangle$为最低阶Euler余流，$\vec{u}_S = \langle \vec{\xi}^0 \cdot \nabla \vec{u}^0(\vec{x}_0,\ t) \rangle$为Stokes漂移速度。这里零阶位移$\vec{\xi}^0 = \int_{t_0}^{t} \vec{u}^0(\vec{x}_0,\ t)\mathrm{d}t$。

式(6)表明，即使在最低阶意义上，Lagrange平均速度与Euler平均速度之间也相差了一个同阶量——Stokes漂移速度。后者是由于流速梯度和波场中水微团位移非线性耦合的波周期平均效应产生的。Longuet-Higgins(1969)称这两者的和为物质输运速度，它们仅是空间坐标的函数。

由于 $\vec{u}_L$已被εU_0尺度化，$\vec{u}_L$及其各组成部分与波场中流速有ε之比。观测研究结果表明，在赤道太平洋海区，波动引起的表层流速振荡幅度约为50cm/ s，因而$\vec{u}_L$约为10cm/ s，与年平均流速值相当(Halpern, 1987; 王凡等，1999)。毫无疑问最低阶赤道波致余流(物质输运速度)对准定常环流而言是不可忽略的。

对零阶模型(3)和一阶模型(4)做波周期平均运算，并利用关系式(6)，可以导出如下在最一般意义下的物质输运速度所满足的动力学方程组，此方程组可作为在最低阶近似下描述赤道海洋波致余环流的基本方程组，其有因次形式如下(注意，此处压强p已被除以常数ρ_0)。

$$\nabla \cdot \vec{u}_L = 0 \tag{7a}$$

$$-\beta y v_L = -\langle p^1 \rangle_x + (\gamma u_{Lz})_z + \pi_1 \tag{7b}$$

$$\beta y u_L = -\langle p^1 \rangle_y + (\gamma v_{Lz})_z + \pi_2 \tag{7c}$$

$$\langle p^1 \rangle_z = -\frac{\langle \rho^1 \rangle}{\rho_0} g \tag{7d}$$

$$-\rho_0 \frac{N_B^2}{g} w_L = (\kappa \langle \rho^1 \rangle_z)_z + \langle \vec{\xi}^0 \cdot \nabla (\kappa \rho_z^0)_z \rangle \tag{7e}$$

边界条件：$z = 0,\ \gamma u_{Lz} = -\left\langle \frac{\vec{\tau}}{\gamma} \cdot \nabla_H \xi^0 \right\rangle + \left\langle \vec{\xi}^0 \cdot \nabla_H \frac{\tau^x}{\gamma} \right\rangle + \left\langle \zeta_z^0 \frac{\tau^x}{\gamma} \right\rangle;$

$$\gamma v_{Lz} = -\left\langle \frac{\vec{\tau}}{\gamma} \cdot \nabla_H \eta^0 \right\rangle + \left\langle \vec{\xi}^0 \cdot \nabla_H \frac{\tau^y}{\gamma} \right\rangle + \left\langle \zeta_z^0 \frac{\tau^y}{\gamma} \right\rangle; \langle \rho^1 \rangle_z = 0; w_L = 0 \tag{8}$$

$$z = -D,\ \gamma u_{Lz} = \gamma v_{Lz} = 0,\ \langle \rho^1 \rangle = 0,\ w_L = 0$$

式中，$\pi_1 = \pi_{1a} + \pi_{1b} + \pi_{1c} + \pi_{1d},\ \pi_2 = \pi_{2a} + \pi_{2b} + \pi_{2c} + \pi_{2d}$ (9)

其中，$(\pi_{1a},\ \pi_{2a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{1}{2}\left\langle \vec{\xi}^0 \cdot \nabla_H p^0 \right\rangle\right);\ \pi_{1b} = -\langle \zeta^0 p_{zx}^0 \rangle;\ \pi_{2b} = -\langle \zeta^0 p_{zy}^0 \rangle;$

$$\pi_{1c} = \left\langle \left(\frac{5}{2}\xi_x^0 + \eta_y^0\right)\gamma u_z^0 + \left(\xi_y^0 + \frac{1}{2}\eta_x^0\right)\gamma v_z^0 + \nabla\gamma \cdot \vec{\xi}^0 u_z^0 \right\rangle_z;$$

$$\pi_{2c} = \left\langle \left(\frac{5}{2}\eta_y^0 + \xi_x^0\right)\gamma v_z^0 + \left(\eta_x^0 + \frac{1}{2}\xi_y^0\right)\gamma u_z^0 + \nabla\gamma \cdot \vec{\xi}^0 v_z^0 \right\rangle_z;$$

$$\pi_{1d} = -\langle \vec{\xi}_z^0 \cdot \nabla(\gamma u_z^0)\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \vec{\xi}_H^0 \cdot (\gamma\vec{u}_z^0)_{zx} \right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \vec{\xi}_{Hzx}^0 \cdot (\gamma\vec{u}_z^0) \right\rangle;$$

$$\pi_{2d} = -\langle \vec{\xi}_z^0 \cdot \nabla(\gamma v_z^0)\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \vec{\xi}_H^0 \cdot (\gamma\vec{u}_z^0)_{zy} \right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \vec{\xi}_{Hzy}^0 \cdot (\gamma\vec{u}_z^0) \right\rangle$$

其中，(π_1, π_2)包含了零阶变量的非线性耦合，在方程组中起体积力的作用，因而可称之为“波致体力”。该体积力的功表明了波振荡能量向定常环流的转移，从而表明，在赤道波运动占优势的连续层化海洋中，环流的产生机制，除了惯常认为的海面风应力和热盐强迫力外，波周期运动的非线性耦合也可产生定常环流。也就是说在赤道海洋中，其环流不仅包括风生和热盐分量，而且也耦合了波生环流分量。

方程组(7)—(9)的意义还在于，它保留了海气界面风应力边界条件，因而包含了风生Lagrange余环流分量，成为更普遍意义上的热带海洋气候学环流模型。式(8)表明，风应力对环流的驱动是通过它与海表面流体微团位移的非线性耦合起作用的。

由“波致体力”的表达式(9)可见，其中每一项皆正比于赤道流场中标识流体微团的位移、流速或它们的导数。这表明波致环流的产生紧密联系于Lagrange轨迹运动与波流场的非线性耦合效应。按“波体力”的组成，波致环流产生于如下三种过程的时间平均：(1)水平位移与压强梯度的非线性耦合(π_{1a}, π_{2a})；(2)垂直位移与水平密度梯度的非线性耦合(π_{1b}, π_{2b})；(3)位移及其梯度与湍粘性及其梯度的非线性耦合$(\pi_{1c} + \pi_{1d}, \pi_{2c} + \pi_{2d})$。其中，第一种过程产生无旋力，后两种过程产生有旋力。

3　最低阶赤道波致Lagrange余流的求解

本研究仅讨论赤道波致环流问题，风应力等外强迫不予考虑。为求得解析解，假设海表面密度扰动为零。将方程(7d)、(7e)合写为：

$$N_B^2 w_L = (\kappa\langle p^1\rangle_z)_{zz} + \langle \vec{\xi}^0 \cdot \nabla(\kappa p_z^0)_{zz}\rangle \tag{10}$$

海面边界条件(8)改写为：

$$z = 0,\ \gamma u_{Lz} = 0,\ \gamma v_{Lz} = 0,\ \langle \rho^1\rangle = 0,\ w_L = 0 \tag{11}$$

引入假设$\gamma(z) = \kappa(z) = A \Big/ N_B^2(z)$(此处$A$为一常数)，并以McCreary(1980)垂直湍扩散数学形式$(\kappa\rho)_{zz}$代替传统Fickian形式$(\kappa\rho_z)_z$后，各变量可表示为如下变量分离形式

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(z),\quad \int_{-D}^{z} b\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n(z),\quad 或\ \mathrm{d}_z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{d}_n\psi_n(z) \tag{12}$$

这里a代表u_L、v_L、u^0、v^0、p^0、$\langle p^1\rangle$、ξ^0、η^0等，b代表ρ^0、$\langle\rho^1\rangle$等，d代表w_L、w^0、ζ^0；垂直结构函数$\{\psi_n\}(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$，是满足Sturm–Liouville特征值问题$\left(\frac{1}{N_B^2}\psi_{nz}\right)_z + \frac{1}{c_n^2}\psi_n = 0$(当$z = 0,\ -D$时，$\psi_n = 0$)的特征函数族，其WKBJ近似解为

$$\psi_n(z) = Z(z)\cos\frac{\int_{-D}^{z} N_B \mathrm{d}z}{c_n} \approx \cos n\pi N' \tag{13}$$

其中 $c_n = \dfrac{\int_{-D}^{0} N_B \mathrm{d}z}{n\pi}$, $N' = \dfrac{\int_{-D}^{z} N_B \mathrm{d}z}{\int_{-D}^{0} N_B \mathrm{d}z}$。式(13)中隐含了 $Z(z) = \left(\dfrac{N_B(z)}{N_B(0)}\right)^{1/2}$ 为 z 的缓变函数并且近乎为1以及 $\psi_n(z)$ 满足归一化条件(即 $\psi_n(0) = 1$)等性质。当 $N_B(z) > 0$ 时, $\{\psi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ 为正交完备系。故而式(13)实质上是物理量在铅垂方向上按正交完备模态之展开, $n = 0$ 对应着与深度无关的正压模态, $n > 0$ 对应第 n 阶斜压模态, c_n 为该模态内重力波速(McCreary, 1980)。该物理量在第 n 斜压模态上的投影,即 a_n、b_n 或 d_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 则由水平结构方程组来描述

$$\begin{aligned}
&u_{Lnx} + v_{Lny} + w_{Ln} = 0\\
&\frac{A}{c_n^2} u_{Ln} - \beta y v_{Ln} = -\langle p^1 \rangle_{nx} + \pi_{1n}\\
&\frac{A}{c_n^2} v_{Ln} + \beta y u_{Ln} = -\langle p^1 \rangle_{ny} + \pi_{2n}\\
&w_{Ln} = \frac{A}{c_n^4} \langle p^1 \rangle_n + \pi_{3n}
\end{aligned} \tag{14}$$

这里, $(\pi_{1n}, \pi_{2n}) = \dfrac{\int_{-D}^{0} (\pi_1, \pi_2)\psi_n \mathrm{d}z}{\int_{-D}^{0} \psi_n^2 \mathrm{d}z}$, $\pi_{3n} = A\dfrac{\int_{-D}^{0}\left(\dfrac{1}{N_B^2}\left\langle \vec{\xi}^0 \cdot \nabla\left(\dfrac{1}{N_B^2} p_z^0\right)_{zz}\right\rangle\right)_z \psi_n \mathrm{d}z}{\int_{-D}^{0} \psi_n^2 \mathrm{d}z}$, 由式(9), π_{1n}, π_{2n} 的各个组成部分和 π_{3n} 的表达式分别为

$$\pi_{1an} = -\frac{1}{4}\left(\sum_{i+j=n} + \sum_{|i-j|=n}\right)\langle \vec{\xi}_i^0 \cdot \nabla_H p_j^0 \rangle_x; \quad \pi_{1bn} = -\sum_{i+j=n} \frac{c_i}{2c_j} \langle \zeta_i^0 p_{jx}^0 \rangle + \sum_{|i-j|=n} \frac{c_i}{2c_j} \langle \zeta_i^0 p_{jx}^0 \rangle \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{1cn} = &-\frac{A}{2}\sum_{i+j=n}\left(\frac{1}{c_i} + \frac{1}{c_j}\right)\frac{1}{c_j}\left\langle\left(\frac{5}{2}\xi_{ix}^0 + \eta_{iy}^0\right)u_j^0 + \left(\xi_{iy}^0 + \frac{1}{2}\eta_{ix}^0\right)v_j\right\rangle\\
&-\frac{A}{2}\sum_{|i-j|=n}\left(\frac{1}{c_j} - \frac{1}{c_i}\right)\frac{1}{c_j}\left\langle\left(\frac{5}{2}\xi_{ix}^0 + \eta_{iy}^0\right)u_j^0 + \left(\xi_{iy}^0 + \frac{1}{2}\eta_{ix}^0\right)v_j\right\rangle
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{1dn} = &\frac{A}{2}\sum_{i+j=n}\frac{1}{c_j}\left\langle\frac{\vec{\xi}_i^0 \cdot \nabla_H u_j^0}{c_i} + \frac{\zeta_i^0 u_j^0}{c_j}\right\rangle + \frac{A}{2}\sum_{|i-j|=n}\frac{1}{c_j}\left\langle -\frac{\vec{\xi}_i^0 \cdot \nabla_H u_j^0}{c_i} + \frac{\zeta_i^0 u_j^0}{c_j}\right\rangle\\
&+\frac{A}{4}\sum_{i+j=n}\frac{1}{c_j}\left\langle\frac{\vec{\xi}_{iH}^0 \cdot \vec{u}_{jx}^0}{c_j} + \frac{\vec{\xi}_{iHx}^0 \cdot \vec{u}_j^0}{c_i}\right\rangle + \frac{A}{4}\sum_{|i-j|=n}\frac{1}{c_j}\left\langle\frac{\vec{\xi}_{iH}^0 \cdot \vec{u}_{jx}^0}{c_j} - \frac{\vec{\xi}_{iHx}^0 \cdot \vec{u}_j^0}{c_i}\right\rangle
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\pi_{2an} = -\frac{1}{4}\left(\sum_{i+j=n} + \sum_{|i-j|=n}\right)\langle \vec{\xi}_i^0 \cdot \nabla_H p_j^0 \rangle_y;$$

$$\pi_{2bn} = -\sum_{i+j=n}\frac{c_i}{2c_j}\langle\zeta_i^0 p_{jy}^0\rangle + \sum_{|i-j|=n}\frac{c_i}{2c_j}\langle\zeta_i^0 p_{jy}^0\rangle \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\pi_{2cn} = &-\frac{A}{2}\sum_{i+j=n}\left(\frac{1}{c_j}+\frac{1}{c_i}\right)\frac{1}{c_j}\left\langle\left(\xi_{ix}^0+\frac{5}{2}\eta_{iy}^0\right)v_j^0+\left(\frac{1}{2}\xi_{iy}^0+\eta_{ix}^0\right)u_j\right\rangle\\ &-\frac{A}{2}\sum_{|i-j|=n}\left(\frac{1}{c_j}-\frac{1}{c_i}\right)\frac{1}{c_j}\left\langle\left(\xi_{ix}^0+\frac{5}{2}\eta_{iy}^0\right)v_j^0+\left(\frac{1}{2}\xi_{iy}^0+\eta_{ix}^0\right)u_j\right\rangle\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\pi_{2dn} = &\frac{A}{2}\sum_{i+j=n}\frac{1}{c_j}\left\langle\frac{\vec{\xi}_i^0\cdot\nabla_H v_j^0}{c_i}+\frac{\zeta_i^0 v_j^0}{c_j}\right\rangle+\frac{A}{2}\sum_{|i-j|=n}\frac{1}{c_j}\left\langle-\frac{\vec{\xi}_i^0\cdot\nabla_H v_j^0}{c_i}+\frac{\zeta_i^0 v_j^0}{c_j}\right\rangle\\ &+\frac{A}{4}\sum_{i+j=n}\frac{1}{c_j}\left\langle\frac{\vec{\xi}_{iH}^0\cdot\vec{u}_{jy}^0}{c_j}+\frac{\vec{\xi}_{iHy}^0\cdot\vec{u}_j^0}{c_i}\right\rangle+\frac{A}{4}\sum_{|i-j|=n}\frac{1}{c_j}\left\langle\frac{\vec{\xi}_{iH}^0\cdot\vec{u}_{jy}^0}{c_j}-\frac{\vec{\xi}_{iHy}^0\cdot\vec{u}_j^0}{c_i}\right\rangle\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\pi_{3n} = &\frac{A}{2}\sum_{i+j=n}\frac{1}{c_j^3}\left(\frac{1}{c_i}+\frac{1}{c_j}\right)\left(\langle\vec{\xi}_{iH}^0\cdot\nabla p_j^0\rangle+\frac{c_i}{c_j}\langle\zeta_i^0 p_j^0\rangle\right)\\ &+\frac{A}{2}\sum_{|i-j|=n}\frac{1}{c_j^3}\left(\frac{1}{c_j}-\frac{1}{c_i}\right)\left(\langle\vec{\xi}_{iH}^0\cdot\nabla p_j^0\rangle-\frac{c_i}{c_j}\langle\zeta_i^0 p_j^0\rangle\right)\end{aligned} \tag{21}$$

式(15)—(21)表明，零阶波动的第 i、j 阶斜压模态的非线性耦合对一阶模型产生第 $i+j$ 阶和第 $|i-j|$ 阶斜压模态上的强迫，所导致的一阶运动和相关的余流属于第 $i+j$ 阶和第 $|i-j|$ 阶斜压模态。显然，Lagrange 余流的垂直结构将不同于零阶波动的垂直结构。

将方程组(14)合并成 v_{Ln}满足的方程

$$(-c_n^2 v_{Lnyy}+\beta^2 y^2 v_{Ln})-c_n^2 v_{Lnxx}+\frac{A^2}{c_n^4}v_{Ln}-\frac{c_n^4}{A}\beta v_{Lnx}=F_n \tag{22}$$

其中，

$$F_n=\frac{c_n^4}{A}\pi_{1nxy}-\beta y\pi_{1n}+\frac{A}{c_n^2}\pi_{2n}-\frac{c_n^4}{A}\pi_{2nxx}+C_n^2\pi_{3ny}-\frac{c_n^4}{A}\beta y\pi_{3nx} \tag{23}$$

零阶波动是赤道陷的，由此可以想见其产生的余流也是赤道陷的，即满足 $\lim\limits_{|y|\to\infty}v_{Ln}=0$。在此条件下，方程(22)的 y 变量可以分离出来，其解则可写为

$$v_{Ln}=\sum_{m=0}^{\infty}v_{Lnm}(x)\phi_m(\eta_n),\ \eta_n=\frac{y}{\sqrt{c_n/\beta}} \tag{24}$$

其中正交完备的 Hermite 函数族 $\{\phi_m\}(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \cdots)$是满足 Weber 方程 $v_{yy}+(\alpha_m-y^2)\ v=0(\lim\limits_{|y|\to\infty}v=0)$的特征函数，$\alpha_m=2m+1$ 为相应的特征值。$\phi_m(y)=\dfrac{(-1)^m e^{y^2/2}}{\sqrt{2^m m!\sqrt{\pi}}}\dfrac{d^m e^{-y^2}}{dy^m}$为归一化的 m 阶 Hermite 函数，描述物理量的 m 阶经向模态的空间结构。v_{Lnm}即 v_{Ln}在第 m 经向模态上的投影，它所满足的方程为

$$-c_n^2 v_{Lnmxx} + c_n\beta\alpha_m v_{Lnm} + \frac{A^2}{c_n^4} v_{Lnm} - \frac{c_n^4}{A}\beta v_{Lnmx} = F_{nm} \tag{25}$$

其中 $F_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} F_n \phi_m \mathrm{d}\eta_n$。式(25)为关于 $v_{Lnm}(X)$ 的二阶常系数非齐次线性常微分方程。其解为

$$v_{Lnm}(x) = \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\int F_{nm}\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\int F_{nm}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}\mathrm{d}x\right)\frac{C_v}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \tag{26}$$

其中 λ_1、λ_2 为式(25)的齐次方程的两个互异且正负符号不同的实特征值，其表达式为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_n^2\beta}{2A} \pm \sqrt{\frac{c_n^4\beta^2}{4A^2} + \frac{\beta\alpha_m}{c_n} + \frac{A^2}{c_n^6}} = a \pm b(m) \tag{27}$$

系数 $C_1 = C_2 = 0$ 以满足 $\lim\limits_{|x|\to\infty} v_{Lnm} < \infty$ 的边界条件。这样，式(26)中仅剩包含 F_{nm}——零阶非线性耦合项的部分，从而证明波致 Lagrange 余流产生于零阶量的非线性耦合。另外，C_v 为待定系数，只需将式(26)代入式(25)即可确定。

求得 v_{Ln} 后，由方程组(14)可分别求得 u_{Ln}、w_{Ln}、$\langle p^1\rangle_n$ 的如下形式的解

$$\begin{pmatrix} u_{Ln} \\ w_{Ln} \\ \langle p^1\rangle_n \end{pmatrix}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\eta_n) \begin{pmatrix} u_{Lnm} \\ w_{Lnm} \\ \langle p^1\rangle_{nm} \end{pmatrix}(x) \tag{28}$$

其中，

$$u_{Lnm} = \frac{c_n^3}{A}\left(\mathrm{e}^{\frac{A}{c_n^3}x}\int F_{unm}\mathrm{e}^{-\frac{A}{c_n^3}x}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-\frac{A}{c_n^3}x}\int F_{unm}\mathrm{e}^{\frac{A}{c_n^3}x}\mathrm{d}x\right)C_u$$

$$\langle p^1\rangle_{nm} = \frac{c_n^3}{A}\left(\mathrm{e}^{\frac{A}{c_n^3}x}\int F_{pnm}\mathrm{e}^{-\frac{A}{c_n^3}x}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-\frac{A}{c_n^3}x}\int F_{pnm}\mathrm{e}^{\frac{A}{c_n^3}x}\mathrm{d}x\right)C_p \tag{29}$$

$$w_{Lnm} = -u_{Lnmx} - \sqrt{\frac{\beta}{c_n}}\,[v_{Ln\eta}]_m$$

这里，$[\,]_m = \int_{-\infty}^{\infty}\phi_m \mathrm{d}\eta_n$；$C_u$、$C_p$ 为待定系数；

$$F_{unm} = \sqrt{\beta c_n}\left[\left(1 - \frac{c_n^5\beta}{2A^2}\right)\sqrt{\frac{m+1}{2}}\,v_{Lnm+1} + \left(1 + \frac{c_n^5\beta}{2A^2}\right)\sqrt{\frac{m}{2}}\,v_{Lnm-1}\right] + \\ + \frac{c_n^3}{A}\sqrt{\beta c_n}\left[b(m+1)\sqrt{\frac{m+1}{2}}\,v'_{Lnm+1} - b(m-1)\sqrt{\frac{m}{2}}\,v'_{Lnm-1}\right] + \pi_{1nm} + \frac{c_n^4}{A}\pi_{3nmx};$$

$$F_{pnm} = C_n\sqrt{\beta c_n}\left[\left(1 - \frac{c_n^5\beta}{2A^2}\right)\sqrt{\frac{m+1}{2}}\,v_{Lnm+1} + \left(1 + \frac{c_n^5\beta}{2A^2}\right)\sqrt{\frac{m}{2}}\,v_{Lnm-1}\right] + \\ - \frac{c_n^4}{A}\sqrt{\beta c_n}\left[b(m+1)\sqrt{\frac{m+1}{2}}\,v'_{Lnm+1} - b(m-1)\sqrt{\frac{m}{2}}\,v'_{Lnm-1}\right] - \frac{c_n^4}{A}\pi_{1nmx} - c_n^2\pi_{3nm} \tag{30}$$

其中，$v'_{Lnm}(x) = \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\int F_{nm}\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\int F_{nm}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}\mathrm{d}x\right)\frac{C_v}{\lambda_1 - \lambda_2}$。

由式(12)、(24)、(28)知，各余流和时间平均压强的铅垂向和经向结构分别由斜压模态和经向模态及其线性组合所描述，其中的若干个主要模态将决定该物理量的空间特征。斜压模态阶数越高，由式(13)知其铅垂向扭曲得越厉害，经向模态的特征尺度$\sqrt{c_n/\beta}$越小；同一斜压模态上经向模态阶数越高，其经向扭曲得越厉害，并且偶数阶关于赤道正对称，奇数阶关于赤道反对称。由式(26)、(27)、(29)知，各余流和时间平均压强的纬向结构受斜压、经向模态以及耗散效应的影响；此外，由式(23)、(30)知，它还取决于F_n、F_{unm}、F_{pnm}中由零阶耦合项π_{1n}、π_{2n}、π_{3n}演化而来的诸项的纬向结构，这显然与零阶波自身的性质有关。

4　结论

本研究在连续层化赤道海洋波动的弱非线性动力学系统中，建立了由最低阶Lagrange余流体现的包含波致、风生等效应在内的热带海洋余环流基本方程组。经分析发现，零阶赤道波动自身的非线性耦合可产生一阶余流，其量级对于热带上层海洋准定常环流而言是不可忽略的。波致环流的产生紧密联系于Lagrange轨迹运动与波流场的非线性耦合效应。最低阶赤道波致Lagrange余流的一般解表现出与零阶波动不同的垂直与经向结构。

参　考　文　献

王　凡，吴德星，冯士筰等，1998. 赤道海洋波动弱非线性动力学系统浅析. 海洋科学，3：40—42

王　凡，吴德星，1999. 赤道中、东太平洋表层流速20d振荡特征分析，海洋与湖沼，30(3)：333—341

冯士筰，1988. 论浅海环流及其输运的流体动力学基础，清华大学工程力学与工程热物理学术会议论文集. 北京：清华大学出版社，199—208

冯士筰，1992. 浅海环流物理及数值模拟，物理海洋数值计算. 郑州：河南科学技术出版社，543—610

Bryden H L, Brady E C, 1989. Eddy momentum and heat fluxes and their effects on the circulation of the equatorial Pacific Ocean. J Mar Res, 47:55—79

Cheng R T, Casulli V, 1982. On Lagrangian residual currents with applications in South San Francisco Bay, California. Water Resour Res, 18: 1 652

Feng S, Cheng R T, Xi P, 1986. On tidal-induced Lagrangian residual current and residual transport, 1: Lagrangian residual current. water Resour Res, 22: 1 623—1 634

Graef F, Magaard I, 1994. Reflection nonlinear baroclinic Rossby waves and the driving of secondary mean flows. J Phys Oceanogr, 24: 1867—1894

Halpem D, 1987. Observations of annual and ElNino thermal and flow variations at 0°, 110°W and 0°, 95°W during 1980—1985. J Geophys Res, 92: 8 197—8 212

Hansen D, Paul C, 1984. Genesis and effects of long waves in the equatorial Pacific. J Geophys. Res, 89: 10 431—10 440

Hebert D, Moum J N, Paulson C A *et al* 1991. The role of the turbulent stress divergence in the equatorial Pacific zonal momentum balance. J Geophys Res, 96: 7 127—7 136

Longuet-Higgins M S, 1969. On the transport of mass by time-varying ocean currents. Deep-Sea Res, 16: 431

Luther D S, Johnson E, 1990. Eddy energetics in the upper equatorial Pacific during the Hawaii-to-Tahiti Shuttle experiment. J Phys Oceanogr, 20: 913—944

McCreary J P Jr, 1980. Modeling wind-driven ocean circulation. Hawaii Institute of Geophysics Tech Rep HIG-80-3, 1—64

Thompson L, Kawase M, 1993. The nonlinear response of an equatorial ocean to oscillatory forcing. J Mar Res, 51: 467—496

Zimmerman J T F, 1979. On the Euler-Lagrangian transformation and the Stokes' drift in the presence of oscillatory and residual currents. Deep-Sea Res, 26A: 505

A WEAKLY NON-LINEAR MODEL OF THE EQUATORIAL WAVE-INDUCED LAGRANGIAN RESIDUAL CURRENT AND ITS SOLUTIONS

WANG Fan

(*Institute of Oceanology, The Chinese Academy of Sciences, Qingdao*, 266071)

WU De-xing, FENG Shi-zuo, SHI Mao-chong

(*Marine Enviromental College, Ocean University of Qingdao, Qingdao*, 266003)

Abstract To establish a dynamic theory of wave-induced residual circulation and the associated long term material transport in the tropical ocean on the basis of the Lagrangian average concept in order to understand the contribution of the equatorial wave to distribution and variation of climatological circulation and sea surface temperature in the tropical ocean, a set of equations of the wave-driven and wind-driven residual circulation of the tropical ocean satisfied by the lowest order Lagrangian residual current were set up, based on a weakly non-linear dynamic system of the equatorial wave in the continuously. stratified ocean. The model showed that the non-linear coupling of the first order equatorial wave generates secondary residual current of not negligible importance to the quasi-steady upper tropical circulation. Generation of the wave-induced circulation is closely related to the non-linear coupling between the Lagrangian locus and velocity. The general solution of the lowest Lagrangian equatorial wave-induced residual current with different vertical and meridional structures from those of the wave was derived. The results above revealed that, in the continuously stratified ocean with dominant equatorial waves, the steady circulation could be driven by the periodic movement of wave as well as the wind stress and the thermohaline force.

Key words Equatorial oceanic waves Weakly non-linear model Lagrangian wave-induced residual current Non-linear coupling Ocean circulation

Subject classification number P731.2